

## ELEMENTARY TERMS RELATED TO PROPAGATION OF ELASTIC WAVES WITH DISCRETE DESCRIPTION OF THE BODY

**Wacław Borkowski, Józef Rafa**

*Military University of Technology  
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa, Poland  
tel.: +48 22 6839531, fax.: +48 22 6837370  
e-mail: w.borkowski@wme.wat.edu.pl*

**Stanisław Dobrociński**

*Naval University in Gdynia  
ul. Śmidowicza 69 Gdynia, Poland  
tel.: +48 586262638  
email: s.dobrocinski@amw.gdynia.pl*

### **Abstract**

*A short-term load will be considered as one which duration is comparable with the period corresponding with the first natural frequency of the construction. These loads often cause extreme conditions, situated locally or in the whole construction. The values of these extremes decide about the safety of the construction and their definition is essential when designing as well as exploitation. For example the marine constructions have to efficiently oppose the dangers connected to air and underwater explosion. The knowledge regarding the evaluation of the sensitivity of the construction and its ability to withstand the collision is also demanded.*

*Collision is a crash of two ships, a ship crashing against the quay or a ship coming across a mine. In the first two cases we have a mass load while in the third one it is a load of pressure impulse caused by the mine's explosion. At present both kinds of load are called an impact load and the sensitivity of the construction is called an impact resistance. Nevertheless, it is to be noticed that mass loads are at least ten times longer in time than the pressure impulse loads.*

*The constructions taken into consideration (picture 1.1 - 1.6) are usually geometrically complicated and the complex character of the load is mostly not completely described. It is therefore essential to use the simplifications while elaborating the calculation model. These simplifications concern geometry, properties of the material, the conditions of cooperation of the environment (solid body – liquid, solid body – base) and the load. The discrete model describing the purpose of the constructions' dynamics has various singularities that often have only numerical character and follow the discretisation of time and space. When perceiving these singularities it is easier to get a credible solution not confusing the numerical effects with the mechanical ones. The most common disadvantageous effect is artificial pumping of energy to the considered structure which is due to the rounding off the numerical errors. It causes intense rise of the movement parameters and dispersion of the solution – the loss of stability, which is necessary for the solution to converge. In the work, some of the cases from this scope are considered. The presented considerations are illustrated with adequate examples.*

**Keywords:** *elastic body, elastic waves, technical structures of the construction, refraction and interference of waves, modeling the space with finite elements*

## PODSTAWOWE POJĘCIA DOTYCZĄCE PROPAGACJI FAL SPRĘŻYSTYCH PRZY DYSKRETNYM OPISIE OŚRODKA

### **Streszczenie**

*Krótkotrwałe obciążenie będziemy uważać takie, którego czas trwania jest porównywalny z okresem odpowiadającym pierwszej częstości własnej rozważanej konstrukcji. Obciążenia te wywołują na ogół stany ekstremalne, usytuowane lokalnie lub w całej konstrukcji. Wartości tych ekstremów decydują o bezpieczeństwie konstrukcji a ich określenie jest istotne tak na etapie projektowania jak i eksploatacji. Np. konstrukcje morskie muszą*

skutecznie przeciwstawiać się zagrożeniom związanym z wybuchem powietrznym i podwodnym. Wymagana jest także wiedza w zakresie oceny wrażliwości i możliwości przetrwania konstrukcji w razie kolizji.

Przez kolizję rozumiemy tutaj zderzenie się dwóch okrętów, zderzenie się okrętu z nabrzeżem lub wejście okrętu na minę. W pierwszych dwóch przypadkach mamy obciążenie masowe natomiast w trzecim, obciążenie impulsem ciśnienia powodowanego wybuchem miny. Obecnie obydwa rodzaje obciążeń nazywane są obciążeniem udarowym a wrażliwość konstrukcji odpornością udarową. Należy jednak zauważyć, że obciążenia masowe trwają zwykle w czasie przynajmniej dziesięciokrotnie dłużej niż obciążenia impulsem ciśnienia.

Analizowane konstrukcje (rys.1.1 do rys.1.6) są zwykle skomplikowane geometrycznie, a złożony charakter obciążenia jest najczęściej nie w pełni określony. Konieczne jest więc stosowanie uproszczeń przy opracowaniu modelu obliczeniowego. Uproszczenia te, dotyczą geometrii, zachowania się materiału, warunków współpracy ośrodków (ciało stałe - ciecz, ciało stałe - grunt) i obciążenia. Model dyskretny opisujący zadanie dynamiki konstrukcji posiada różne osobliwości mające czysto numeryczny charakter a wynikające z dyskretyzacji czasu i przestrzeni. Uświadomienie tych osobliwości pozwala uzyskać wiarygodne rozwiązanie, nie mieszające efektów o charakterze numerycznym z efektami typu mechanicznego, które są często nowymi przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych. Najczęściej występującym efektem niekorzystnym jest sztuczne pompowanie energii do rozważanego układu, będące skutkiem zaokrąglenia błędów numerycznych. Powoduje to gwałtowny wzrost parametrów ruchu i rozbieganie się rozwiązania czyli utratę stabilności. Natomiast stabilność rozwiązania jest warunkiem koniecznym jego zbieżności. W pracy rozważono wybrane problemy z tego zakresu. Przytoczone rozważania zilustrowano odpowiednimi przykładami.

**Słowa kluczowe:** ośrodek sprężysty, fale sprężyste, układy techniczne konstrukcji, refrakcje i interferencje fal, modelowanie przestrzeni elementami skończonymi

## 1. Wstęp

Przyjmujemy, że czytelnik z racji swoich zawodowych problemów praktycznych musi rozważyć zagadnienia falowe. Będzie więc rozpatrywał zaburzenia pewnego ośrodka rozchodzące się z określoną prędkością i przenoszące energię. Ograniczymy się do fal sprężystych w ciałach stałych gdzie propagacja powoduje przenoszenie energii bez przemieszczania ośrodka.

Propagację zaburzeń w jednorodnym ośrodku sprężystym opisuje równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych w postaci:

$$a_2^2 \nabla^2 \mathbf{u} + (a_1^2 - a_2^2) \text{grad div } \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}} = -\frac{\mathbf{p}}{\rho}, \quad (1.1)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest wektorem przemieszczeń,  $\ddot{\mathbf{u}}$  wektorem przyspieszeń a  $\mathbf{p}$  wektorem sił zewnętrznych. W opisie tym występują dwie prędkości propagacji fal sprężystych

$$a_1 = \sqrt{\frac{2G}{\rho} \frac{1-\nu}{1-2\nu}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (1.2)$$

określone przez stałą sprężystości poprzecznej  $G$ , liczbę Poissona  $\nu$  oraz gęstość  $\rho$ .

Przechodząc z równań (1) do zagadnień jednowymiarowych równanie falowe przyjmie postać:

$$a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \ddot{u} = \frac{P}{\rho}, \quad (1.3)$$

gdzie prędkość propagacji zaburzenia:

$$a_0^2 = \sqrt{\frac{2G(1+\nu)}{\rho}}. \quad (1.4)$$

W przypadku zginania, czyli gdy zaburzenia rozchodzą się w belkach, płytach lub powłokach występują jeszcze inne prędkości propagacji fali. Opis zjawiska propagacji fal w ośrodku obejmuje pojęcia, które mają swoje odzwierciedlenie w interpretacji fizycznej uzyskiwanych rozwiązań równania (1.1).

Stosując do opisu powyższych zjawisk metodę elementów skończonych (MES) [2,3,6,8,9], czyli opis dyskretny, otrzymujemy dla małych deformacji i braku tłumienia układ równań

$$\mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{P}, \quad (1.5)$$

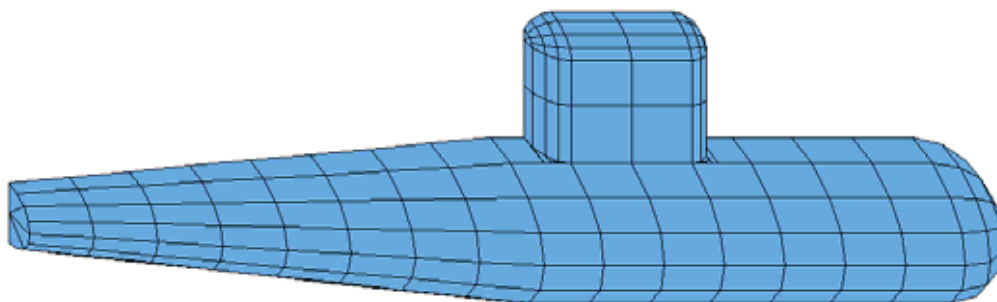
gdzie  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{M}$  stałe w czasie macierze sztywności i bezwładności,  $\mathbf{P}$  wektor wymuszeń zewnętrznych a  $\mathbf{U}$  i  $\ddot{\mathbf{U}}$  to wektor poszukiwanych przemieszczeń i przyspieszeń. Aby określić zbieżność i stabilność rozwiązania układu równań (1.5) wykorzystujemy zamknięte rozwiązania równania (1.1). Jednakże w układzie równań (1.5) nie występują parametry wykorzystywane przy opisie zjawiska w ośrodku ciągłym. Na podstawie prezentowanych poniżej rozwiązań za pomocą MES zobaczymy, że parametry te można wyodrębnić w interpretacji fizycznej uzyskanych wyników.

## 2. Przykłady konstrukcji obciążonych impulsowo.

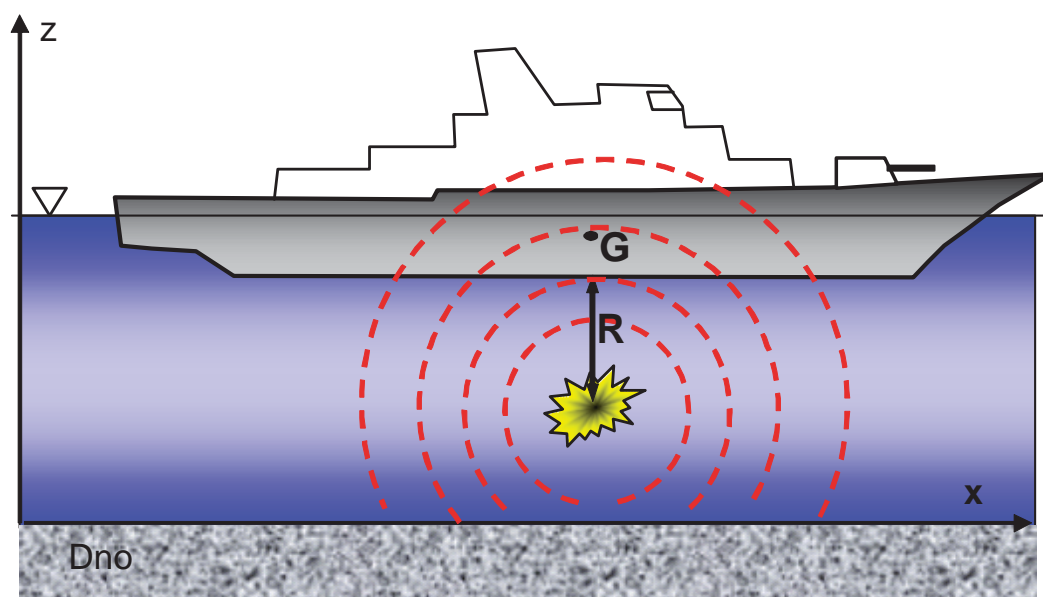
Konieczność określenia skutków krótkotrwałych obciążeń dynamicznych, występuje przy obliczaniu szeregu konstrukcji (mosty, dźwigi, pojazdy, obiekty latające, obiekty pływające, reaktory, wstrząsy górnicze). Krótkotrwałe obciążenie będziemy uważać takie, którego czas trwania jest porównywalny z okresem odpowiadającym pierwszej częstości własnej rozważanej konstrukcji. Obciążenia te wywołują na ogół stany ekstremalne, usytuowane lokalnie lub w całej konstrukcji. Wartości tych ekstremów decydują o bezpieczeństwie konstrukcji a ich określenie jest istotne tak na etapie projektowania jak i eksploatacji. Np. konstrukcje morskie muszą skutecznie przeciwstawiać się zagrożeniom związanym z wybuchem powietrznym i podwodnym. Wymagana jest także wiedza w zakresie oceny wrażliwości i możliwości przetrwania konstrukcji w razie kolizji.

Przez kolizje rozumiemy tutaj zderzenie się dwóch okrętów, zderzenie się okrętu z nabrzeżem lub wejście okrętu na minę. W pierwszych dwóch przypadkach mamy obciążenie masowe natomiast w trzecim, obciążenie impulsem ciśnienia powodowanego wybuchem miny. Obecnie obydwa rodzaje obciążeń nazywane są obciążeniem udarowym a wrażliwość konstrukcji odpornością udarową. Należy jednak zauważyć, że masowe obciążenia konstrukcji trwają zwykle w czasie przynajmniej dziesięciokrotnie dłużej niż obciążenia impulsem ciśnienia.

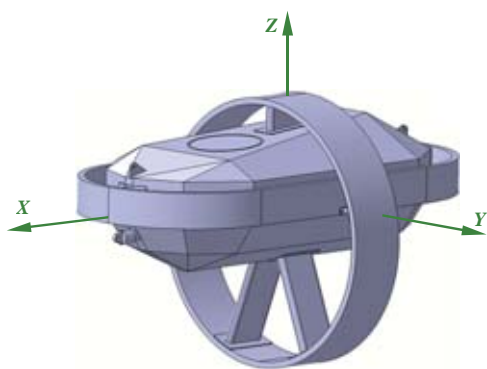
Analizowane konstrukcje (rys.2.1 do rys.2.6) są zwykle skomplikowane geometrycznie, a złożony charakter obciążenia jest najczęściej nie w pełni określony. Konieczne jest więc stosowanie uproszczeń przy opracowaniu modelu obliczeniowego. Uproszczenia te, dotyczą geometrii, zachowania się materiału, warunków współpracy ośrodków (ciało stałe - ciecz, ciało stałe - grunt) i obciążenia. Model dyskretny opisujący zadanie dynamiki konstrukcji posiada różne osobliwości mające czysto numeryczny charakter a wynikające z dyskretyzacji czasu i przestrzeni. Uświadomienie tych osobliwości pozwala uzyskać wiarygodne rozwiązanie, nie mieszające efektów o charakterze numerycznym z efektami typu mechanicznego, które są często *nowymi* przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych. Najczęściej występującym efektem niekorzystnym jest sztuczne pompowanie energii do rozważanego układu, będące między innymi skutkiem zaokrągleń błędów numerycznych. Powoduje to gwałtowny wzrost parametrów ruchu i rozbieganie się rozwiązania czyli utratę stabilności. Natomiast stabilność rozwiązania jest warunkiem koniecznym jego zbieżności.



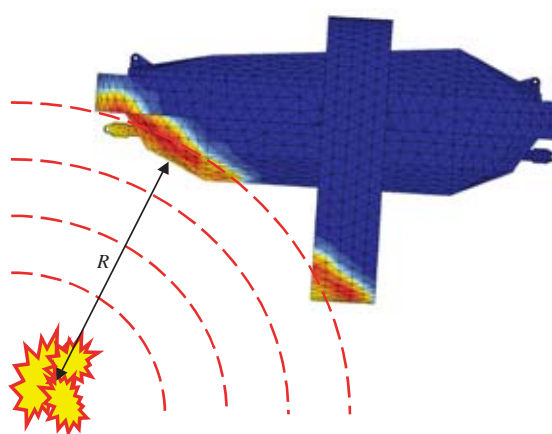
Rys. 2.1. Poszycie kadłuba okrętu podwodnego  
Fig. 2.1. Hull groundcover of submarine



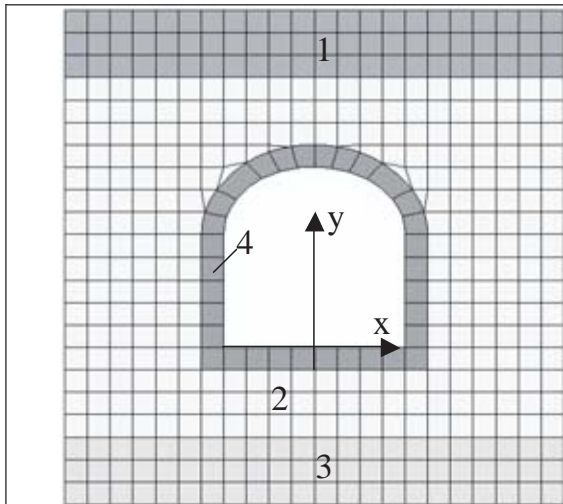
Rys. 2.2. Schemat wybuchu miny pod okrętem  
Fig. 2.2. The schema of the mine explosion under the battleship



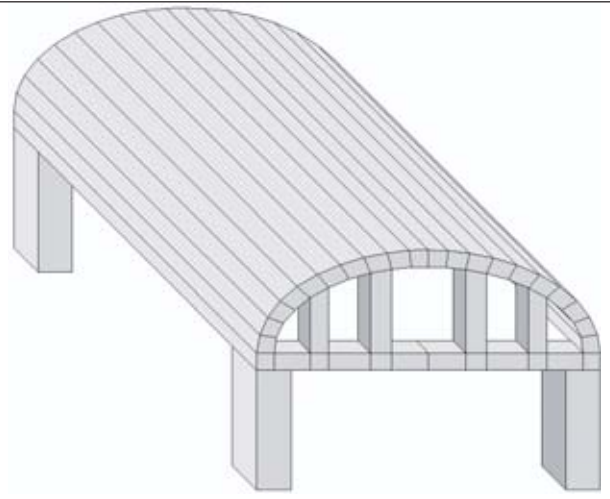
Rys. 2.3. Geometria pojazdu morskiego  
Fig. 2.3. The geometry of the sea-vehicle



Rys. 2.4. Schemat obciążenia pojazdu  
Fig. 2.4. The schema of the vehicle loads

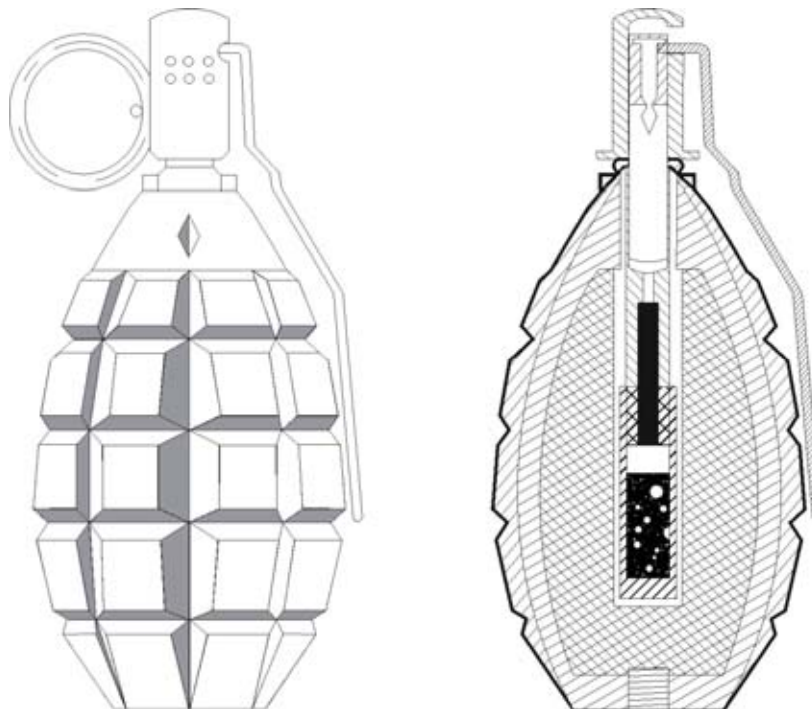


Rys. 2.5. Tunel 1,2,3 – grunt, 4- obudowa tunelu  
 Fig. 2.5. Tunnel 1,2,3 - ground, 4- tunnel case



Rys. 2.6. Betonowa budowla  
 Fig. 2.6. Concrete-structure

Wyniki rozwiązania zadań praktycznych przy obciążeniu krótkotrwałym, zwykle różnią się zasadniczo od wyników przy obciążeniu statycznym i są niekiedy zaskakujące dla prowadzącego obliczenia. Weźmy pod uwagę granat przedstawiony na rys. 2.8. Jego skorupa jest perforowana tak, aby po wybuchu następowała fragmentaryzacja w postaci odłamków. Jednakże okazuje się, że pęknięcia skorupy występują nie wzdłuż najmniejszych przekrojów a wzdłuż przekrojów maksymalnych, tak jak zaznaczono na rys.2.7b. Efekt ten jest skutkiem interferencji fal naprężenia. Występowanie tego efektu przedstawimy na przykładzie kwadratowej płytki.



Rys. 2.7. Granat F1  
 Fig. 2.7. The F1Garnet

Rozwiązanie zadań praktycznych możliwe jest najczęściej przy zastosowaniu metod numerycznych takich jak MRS, MES, MEB. Należy jednak mocno podkreślić, że bezkrytyczne stosowanie metod numerycznych, a w szczególności metody różnic skończonych, może prowadzić

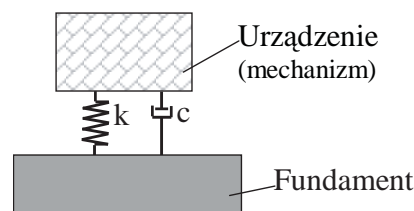


do sytuacji, w których uzyskane rozwiązania numeryczne niewiele mają wspólnego z rozwiązaniami ścisłymi, pomimo w miarę dokładnych aproksymacji pochodnych poszukiwanych funkcji i dokładnego rachunku komputerowego. Dlatego rozwiązania numeryczne zagadnień brzegowych należy poprzedzić wnikliwą analizą adekwatności stosowanych metod przybliżonych i ścisłych oraz odpowiednim doбором algorytmu (Profesor Cz. Rymarz [4]).

Osobnym zagadnieniem odporności udarowej jest zachowanie się różnych podzespołów analizowanej konstrukcji. Pytania nurtujące projektantów konstrukcji dotyczą najczęściej nie wytrzymałości a wartości przyspieszeń występujących w poszczególnych punktach rozważanego obiektu, z uwagi na rozwiązanie sposobu zamocowania urządzeń elektronicznych, fundamentowania układów napędowych, a także posadowienia urządzeń pomocniczych i sprzętu komputerowego.

Przyjmując, że wybuchy min pod obiektami przedstawionymi na rys. 2.1- rys. 2.4 są nie kontaktowe, pomijamy wpływ pęcherza gazowego, możemy minę potraktować jako źródło punktowe. Obiekt traktujemy jako bryłę sztywną o sześciu stopniach swobody, trzy składowe przemieszczenia środka ciężkości i trzy obroty wokół osi współrzędnych, których początek znajduje się w środku ciężkości obiektu. Dyskretyzacja geometrii obiektu pozwoli nam zredukować dowolne obciążenie oraz masę obiektu do jego środka ciężkości.

Na podstawie rozwiązania zagadnienia ruchu obiektu jako bryły sztywnej określimy parametry ruchu dowolnego punktu obiektu pływającego, a zatem również parametry ruchu punktu posadowienia urządzenia, czyli parametry ruchu jego fundamentu rys.2.8. Rozwiązując osobne zadanie, parametry te potraktujemy jako wymuszenie kinematyczne w ruchu rozpatrywanego urządzenia.



Rys. 2.8. Posadowienie urządzenia elektronicznego  
Fig. 2.8. Seating of the electronic device

Obiekty pływające przedstawione na rys. 2.1 – rys. 2.2 traktowane są często nie jako ciało sztywne ale jako belki o zmieniającej się, wzdłuż swojej osi sztywności, zmiennej masie i zmiennym momencie bezwładności. Jest to znacznym rozszerzeniem w stosunku do powyższego opisu i umożliwia szerszą analizę warunków rzeczywistych celem wyodrębnienia stanów newralgicznych.

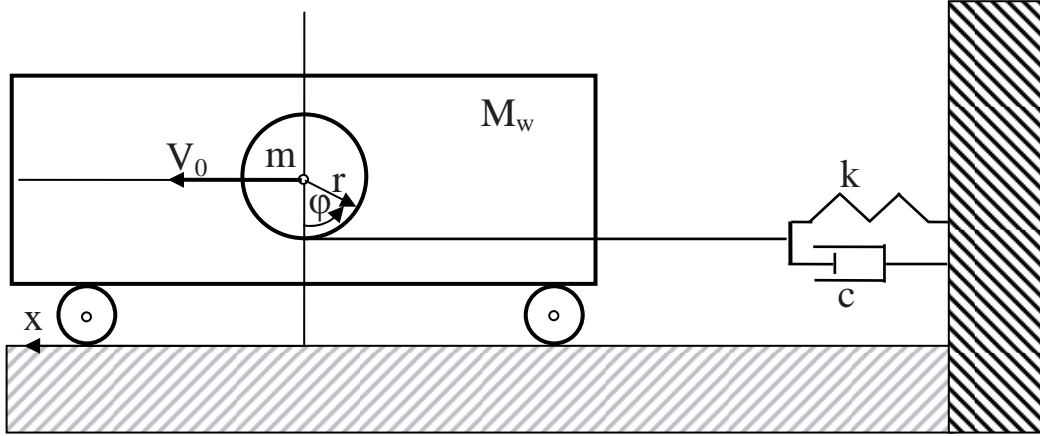
### 3. Czas przekazywania energii

W zagadnieniach dynamicznych, istotnym parametrem rozwiązania jest czas przekazywania energii do rozważanego układu, oraz wewnątrz układu pomiędzy jego poszczególnymi elementami. Czas ten zależy od rozkładu masy i sztywności. W rozwiązaniach numerycznych dopasowanie czasu przekazywania energii pomiędzy poszczególnymi fragmentami konstrukcji zależy od sposobu dyskretyzacji przestrzeni i czasu. Problem ten przedstawimy na poniższych przykładach.

#### 3.1. Ruch bryły sztywnej.

Wózek o masie  $M_w$  porusza się bez tarcia, po poziomym podłożu ze stałą prędkością  $V_0$ . W środku ciężkości wózka znajduje się oś walca o masie  $m$  i momencie bezwładności  $I$ . Walec jest

zamocowany obrotowo względem wózka. Na walec ten nawinięta jest nierozciągliwa linka zakończona amortyzatorem o sztywności  $k$  i współczynniku tłumienia  $c$ . W pewnej chwili amortyzator został zaczepiony do sztywnej ściany rys. 3.1 i ruch wózka powoduje odwijanie nici ale jednocześnie obrót walca.



Rys. 3.1. Ruch bryły sztywnej  
Fig. 3.1. Movement of the stiff block

Energia kinetyczna wózka zamienia się na energię kinetyczną walca oraz energię sprężystą amortyzatora. Część energii kinetycznej wózka tracona jest na pokonanie oporów tłumika. Ruch rozważanego układu opiszemy za pomocą współrzędnej  $x$  określającą przemieszczanie się środka ciężkości oraz kąta  $\varphi$  obrotu walca.

Energię kinetyczną układu wyrazimy następująco:

$$E_k = \frac{1}{2}(M_w \dot{x}^2 + m \dot{x}^2 + I \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}(M \dot{x}^2 + I \dot{\varphi}^2), \quad (3.1)$$

gdzie  $M=M_w+m$ . Energia sprężysta zależna jest od wydłużenia sprężyny, czyli:

$$E_s = \frac{k}{2}(x - r \varphi)^2. \quad (3.2)$$

Siła oporu tłumika  $R_t = c(\dot{x} - r \dot{\varphi})$  wykona pracę na przemieszczeniu możliwym  $\delta u = \delta(x - r \varphi)$ . Wykorzystując równania Lagrange'a otrzymamy układ równań ruchu:

$$M \ddot{x} + k(x - r \varphi) + c(\dot{x} - r \dot{\varphi}) = 0, \quad I \ddot{\varphi} - k r(x - r \varphi) - c r(\dot{x} - r \dot{\varphi}) = 0, \quad (3.3)$$

przy następujących warunkach początkowych:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = V_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0. \quad (3.4)$$

Przyjmujemy jako współrzędną główną wydłużenie sprężyny:

$$u = k(x - r \varphi), \quad \text{a stąd } \dot{u} = k(\dot{x} - r \dot{\varphi}) \text{ oraz } \ddot{u} = k(\ddot{x} - r \ddot{\varphi}).$$

Wyrażając równania ruchu za pomocą współrzędnej głównej otrzymamy:

$$\ddot{x} + \frac{k}{M} u + \frac{c}{M} \dot{u} = 0, \quad (3.5a)$$

$$r \ddot{\varphi} - \frac{k r^2}{I} u - \frac{c r^2}{I} \dot{u} = 0. \quad (3.5b)$$

Odejmując od równania (a) równanie (b), układ równań sprowadzi się do jednego równania o postaci:

$$\ddot{u} + k \left( \frac{1}{M} + \frac{r^2}{I} \right) u + c \left( \frac{1}{M} + \frac{r^2}{I} \right) \dot{u} = 0. \quad (3.6)$$

Przyjmując oznaczenia :

$$\omega_0^2 = k \left( \frac{1}{M} + \frac{r^2}{I} \right), \quad \eta = \frac{c}{2} \left( \frac{1}{M} + \frac{r^2}{I} \right), \quad (3.7)$$

równanie ruchu zapiszemy następująco:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + 2 \eta \dot{u} = 0. \quad (3.8)$$

Wprowadzimy nową funkcję:

$$u(t) = e^{-\eta t} w(t), \quad (3.9)$$

i otrzymamy, że funkcja ta spełnia równanie:

$$\ddot{w} + \omega^2 w = 0, \quad \text{gdzie } \omega^2 = \omega_0^2 - \eta^2. \quad (3.10)$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja:

$$w(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (3.11)$$

natomiast:

$$u(t) = e^{-\eta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (3.12)$$

Wykorzystując warunki początkowe otrzymamy:

$$A = 0, \quad B = \frac{V_0}{\omega}, \quad (3.13)$$

stąd funkcja  $u(t)$  będzie miała postać:

$$u(t) = \frac{V_0}{\omega} e^{-\eta t} \sin \omega t. \quad (3.14)$$

Wstawiając powyższe rozwiązanie do wzoru (a) uzyskamy zależność,

$$\ddot{x} = -\frac{V_0}{\omega M} e^{-\eta t} [k \sin \omega t + c (\omega - \eta) \cos \omega t] = \frac{V_0}{\omega M} e^{-\eta t} [(k - \eta c) \sin \omega t + c \omega \cos \omega t], \quad (3.15)$$

a przyjmując nowe stałe  $a_1 = (k - \eta c)$ ,  $b_1 = c \omega$ , przyspieszenie wózka wyrazi się wzorem:

$$\ddot{x} = -\frac{V_0}{\omega M} e^{-\eta t} (a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t). \quad (3.16)$$

Całkując obustronnie powyższe równanie otrzymamy wyrażenie określające prędkość wózka. Wykonując następujące całki:

$$\int e^{-\eta t} \sin \omega t dt = \frac{e^{-\eta t}}{\omega^2 + \eta^2} (-\eta \sin \omega t - \omega \cos \omega t), \quad (3.17)$$

$$\int e^{-\eta t} \cos \omega t dt = \frac{e^{-\eta t}}{\omega^2 + \eta^2} (-\eta \cos \omega t + \omega \sin \omega t),$$

prędkość wyrazi się następująco:

$$\dot{x} = -\frac{V_0}{\omega M} \frac{e^{-\eta t}}{\omega^2 + \eta^2} [a_1 (-\eta \sin \omega t - \omega \cos \omega t) + b_1 (-\eta \cos \omega t + \omega \sin \omega t)] + c_1. \quad (3.18)$$

Przyjmujemy nowe stałe  $a_2 = (-a_1 \eta + b_1 \omega)$ ,  $b_2 = (-a_1 \omega - b_1 \eta)$ , i wyznaczając stałą całkowania  $c_1$  z warunku początkowego  $\dot{x}(0) = V_0$ ,

$$V_0 = \frac{V_0}{\omega M} \frac{1}{\omega^2 + \eta^2} b_2 + c_1, \quad (3.19)$$

prędkość wózka zapiszemy wzorem:

$$\dot{x} = \frac{V_0}{\omega M} \frac{e^{-\eta t}}{\omega^2 + \eta^2} [a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t] + c_1. \quad (3.20)$$

Po obustronnym całkowaniu powyższego wzoru i przyjęciu stałych:



$$a_3 = (-a_2\eta + b_2\omega), \quad b_3 = (-a_2\omega - b_2\eta), \quad (3.21)$$

otrzymamy zależność określającą przemieszczanie się wózka w czasie t:

$$x = \frac{V_0}{\omega M} \frac{e^{-\eta t}}{(\omega^2 + \eta^2)^2} [a_3 \sin \omega t + b_3 \cos \omega t] + c_1 t + c_2, \quad (3.22)$$

gdzie stałą całkowania  $c_2$  wyznaczamy z warunku początkowego  $x(0)=0$ :

$$0 = \frac{V_0}{\omega M} \frac{1}{(\omega^2 + \eta^2)^2} b_2 + c_2. \quad (3.23)$$

Wykorzystując wzór (b) i postępując analogicznie jak w przypadku wzoru (a) wyznaczmy przyspieszenie kątowe walca:

$$\ddot{\varphi} = \frac{r V_0}{\omega I} e^{-\eta t} (a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t). \quad (3.24)$$

Po obustronnym całkowaniu powyższego równania otrzymujemy prędkość kątową walca:

$$\dot{\varphi} = \frac{V_0}{\omega I} \frac{e^{-\eta t}}{\omega^2 + \eta^2} [a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t] + d_1. \quad (3.25)$$

Stałą całkowania  $d_1$  wyznaczmy z warunku początkowego  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,

$$0 = \frac{V_0}{\omega I} \frac{1}{\omega^2 + \eta^2} b_2 + d_1. \quad (3.26)$$

Kąt obrotu walca wyrazi się zależnością:

$$\varphi = \frac{V_0}{\omega I} \frac{e^{-\eta t}}{(\omega^2 + \eta^2)^2} [a_3 \sin \omega t + b_3 \cos \omega t] + d_1 t + d_2, \quad (3.27)$$

dla stałej całkowania wyznaczonej z warunku początkowego  $\varphi(0)=0$ :

$$0 = \frac{V_0}{\omega I} \frac{1}{(\omega^2 + \eta^2)^2} b_3 + d_2. \quad (3.28)$$

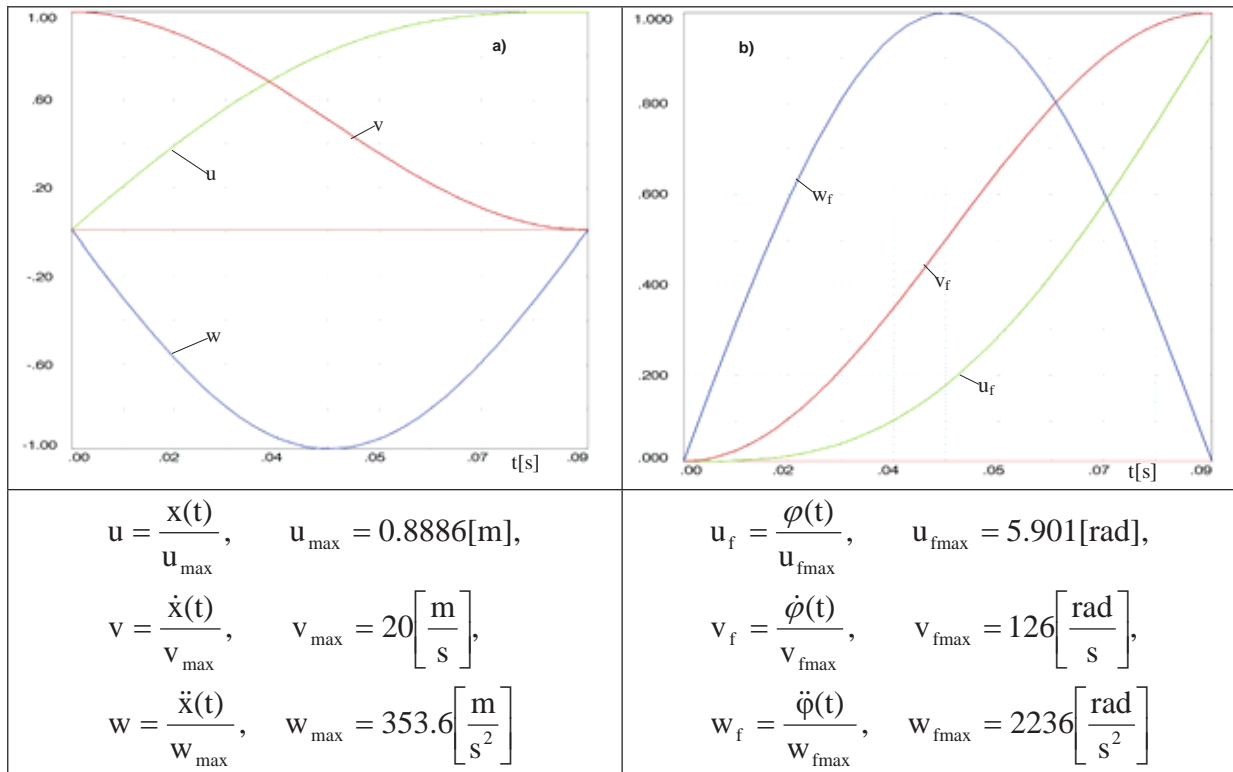
Przyjmijmy do obliczeń następujące dane:

- masa całego układu  $M=1000$ [kg],
- moment bezwładności walca  $I=25$ [kg m<sup>2</sup>],
- sztywność sprężyny  $k=6.25 \cdot 10^5$ [N/m],
- współczynnik tłumienia  $c=0$ ,
- trzy warianty promienia  $r$ [m] ( $r_1=0.1582$ ,  $r_2=0.12$ ,  $r_3=0.18$ ).

Wyniki obliczeń parametrów ruchu wózka i walca, dla układu zachowawczego i kolejnych wariantów promienia  $r$ , przedstawiono na poniższych rysunkach przyjmując oznaczenia zestawione w tabeli 3.1.

*Tabela 3.1. Oznaczenia ruchu wózka i walca*  
*Table 3.1. Notations of the cart and cylinder movement*

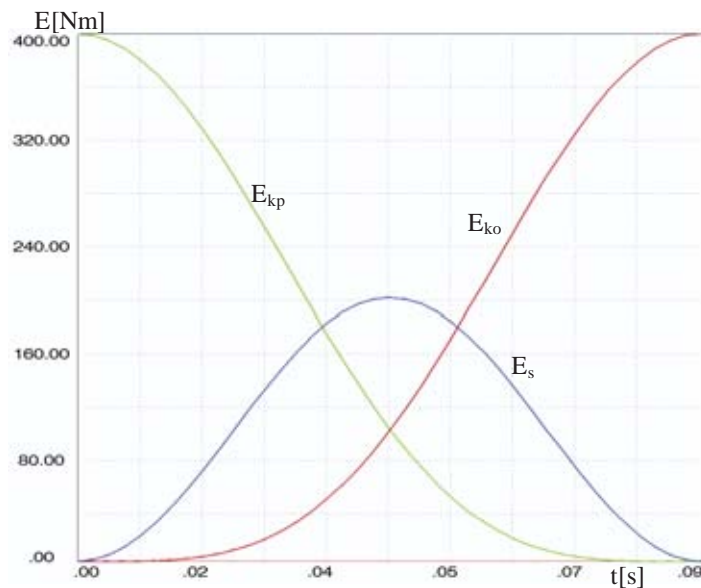
Wózek	Walec
u – przemieszczenie	$u_f$ – kąt obrotu
v – prędkość	$v_f$ – prędkość kątowna
w – przyspieszenie	$w_f$ - przyspieszenie kątowe



Rys. 3.2. Wariant pierwszy  $r=0.1581[\text{m}]$ , a) –ruch postępowy, b)-ruch obrotowy  
 Fig. 3.2. The first variant  $r=0.1581[\text{m}]$ , a) -the translation, b)-the rotary motion

W wariantcie pierwszym tak dobrano czas przekazywania energii aby energia kinetyczna wózka została zamieniona na energię kinetyczną walca rys. 3.3. Maksymalne przyspieszenie wózka (rys. 3.2 a) wynosi  $353.6 [\text{m}/\text{s}^2]$ .

W przypadku wariantu drugiego rys.3.4 a, prędkość wózka osiąga wartość równą zero w czasie krótszym niż poprzednio, stąd nie cała energia kinetyczna wózka została zamieniona na energię kinetyczną walca rys. 3.5. Jednakże maksymalne przyspieszenie wzrosło do  $398.3[\text{m}/\text{s}^2]$ .

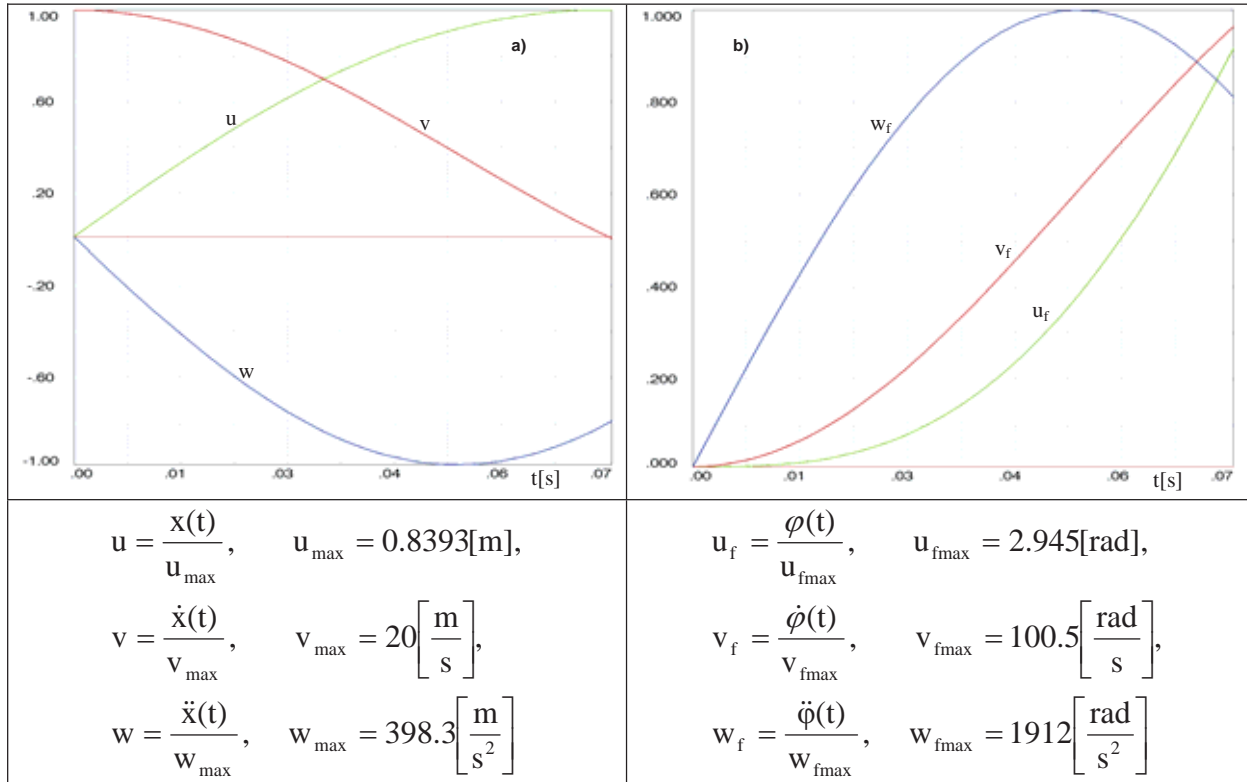


Rys.3.3. Zmiana w czasie: energii ruchu postępowego  $E_{kp}=500 E$ , energii ruchu obrotowego  $E_{ko}=500 E$ , energii sprężystej  $E_s=500 E$

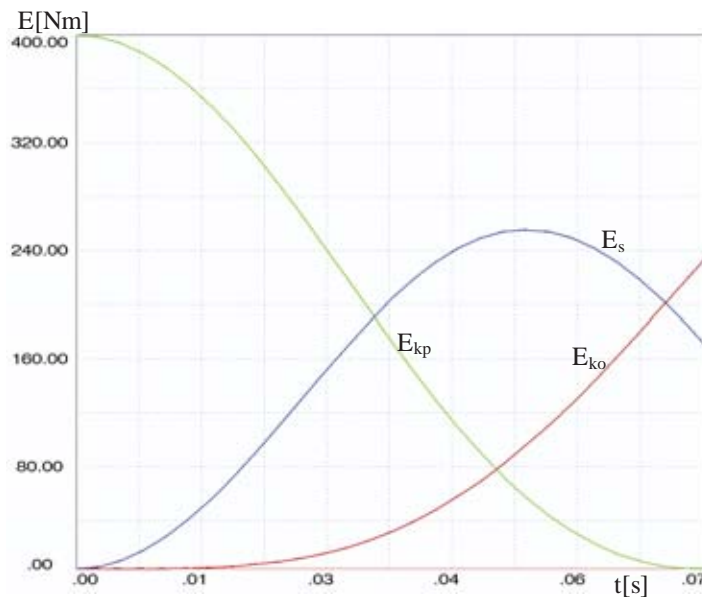
Rys.3.3. Change in time: the energy of the translation  $E_{kp}=500 E$ , energy of the rotary motion  $E_{ko}=500 E$ , elastic energy  $E_s=500 E$

W wariancie pierwszym tak dobrano czas przekazywania energii aby energia kinetyczna wózka została zamieniona na energię kinetyczną walca rys. 3.3. Maksymalne przyspieszenie wózka (rys. 3.2 a) wynosi  $353.6 \text{ [m/s}^2\text{]}$ .

W przypadku wariantu drugiego rys. 3.4 a, prędkość wózka osiąga wartość równą zero w czasie krótszym niż poprzednio, stąd nie cała energia kinetyczna wózka została zamieniona na energię kinetyczną walca rys. 3.5. Jednakże maksymalne przyspieszenie wzrosło do  $398.3 \text{ [m/s}^2\text{]}$ .

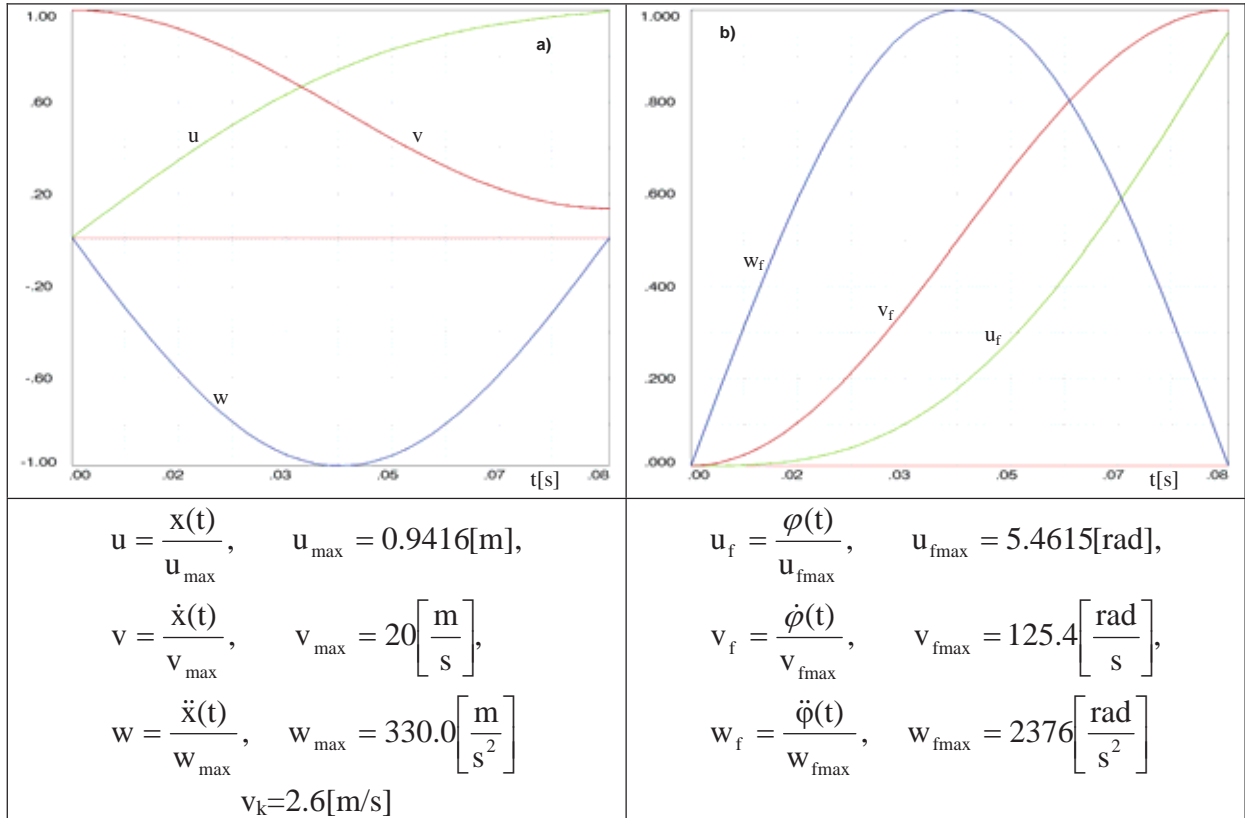


Rys. 3.4. Wariant drugi  $r=0.12 \text{ [m]}$ , a) –ruch postępowy, b)-ruch obrotowy  
 Fig. 3.4. The second variant  $r = 0.12 \text{ [m]}$ , a) -the translation, b)-the rotary motion

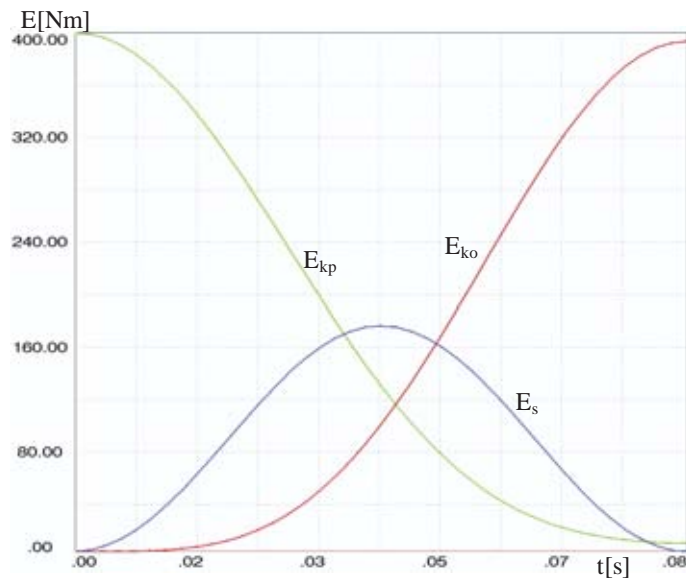


Rys. 3.5. Zmiana w czasie: energii ruchu postępowego  $E_{kp}=500 E$ , energii ruchu obrotowego  $E_{ko}=500 E$ , energii sprężystej  $E_s=500 E$   
 Fig. 3.5. Change in time: the energy of the translation  $E_{kp}$ =of  $500 E$ , energy of the rotary motion  $E_{ko}=500 E$ , elastic energy  $E_s = 500 E$

Charakterystycznym jest wariant trzeci, nie następuje zatrzymanie się wózka rys.3.6a gdyż minimalna jego prędkość wynosi 2.6[m/s]. Energia kinetyczna wózka rys.3.7 osiąga wartość minimalną, ale skutkiem nie dopasowanie czasu przekazywania energii wartość ta jest większa od zera. Oczwistym efektem tego jest obniżenie wartości maksymalnej przyśpieszenia do 330[m/s<sup>2</sup>].

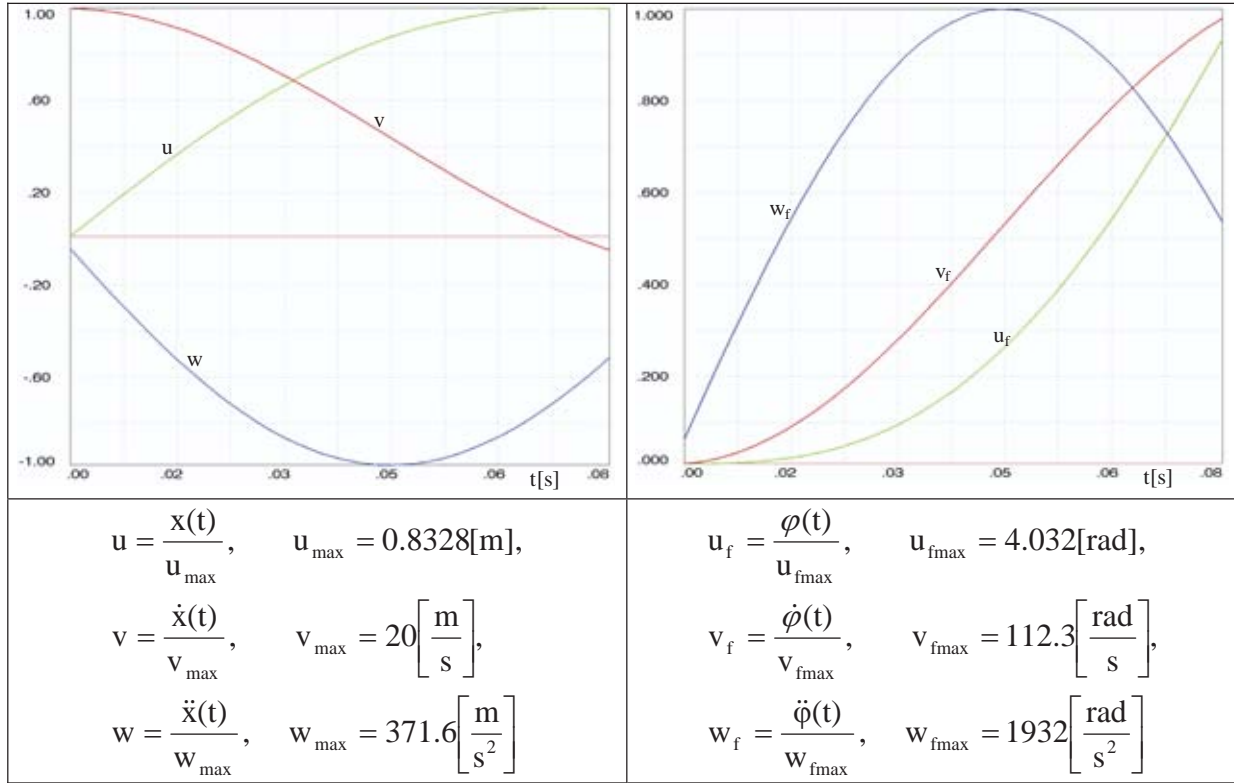


Rys. 3.6 Wariant trzeci  $r=0.18[\text{m}]$ , a) –ruch postępowy, b)-ruch obrotowy  
 Fig. 3.6. The third variant  $r = 0.18[\text{m}]$ , a) -the translation, b)-the rotary motion

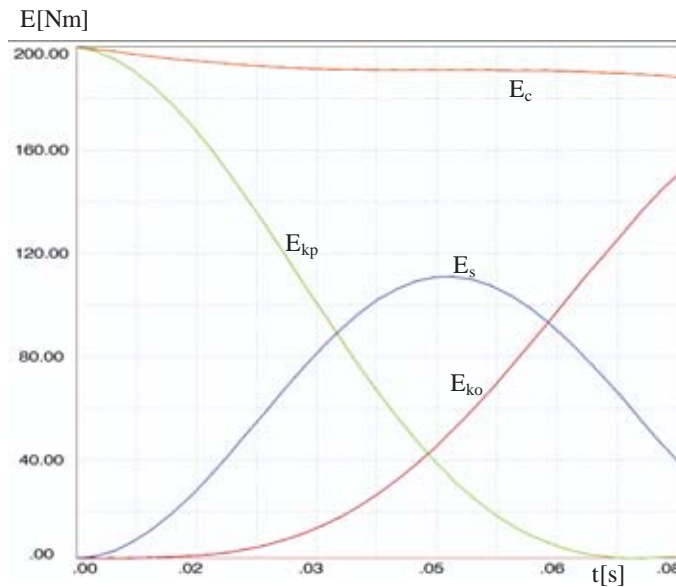


Rys. 3.7. Zmiana w czasie: energii ruchu postępowego  $E_{kp}=500 E$ , energii ruchu obrotowego  $E_{ko}=500 E$ , energii sprężystej  $E_s=500 E$   
 Fig. 3.7. Change in time: the energy of the translation  $E_{kp}=500 E$ , energy of the rotary motion  $E_{ko}=500 E$ , the elastic energy  $E_s = 500 E$

Dopasowanie czasu przekazywania energii jest nieco trudniejsze w przypadku gdy występuje tłumienie w układzie. Przyjmijmy współczynnik tłumienia  $c=1000$  i promień  $r=0.13[m]$ . Wyniki obliczeń przedstawiono na poniższych rysunkach. Wózek zatrzymuje się (rys. 3.8 a) gdy jego energia kinetyczna jest równa zero rys. 3.9. Część energii jest tracona na pokonanie oporu występującego w układzie.



Rys. 3.8  $r=0.18[m]$ , a) –ruch postępowy, b)-ruch obrotowy  
 Fig. 3.8  $r=0.18[m]$ , a) -the translation, b)-the rotary motion

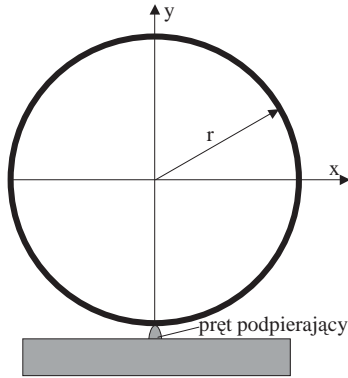


Rys. 3.9. Zmiana energii ruchu postępowego  $E_{kp}=1000 E$ , ruchu obrotowego  $E_{ko}=1000 E$ , energii sprężystej  $E_s=1000 E$ , energii całkowitej  $E_c=E_{kp}+E_{ko}+E_s$   
 Fig. 3.9. The change of the energy of the translation  $E_{kp}=1000 E$ , the rotary motion  $E_{ko}=1000 E$ , the energy elastic  $E_s=1000 E$ , the entire energy  $E_c =E_{kp}+E_{ko}+E_s$

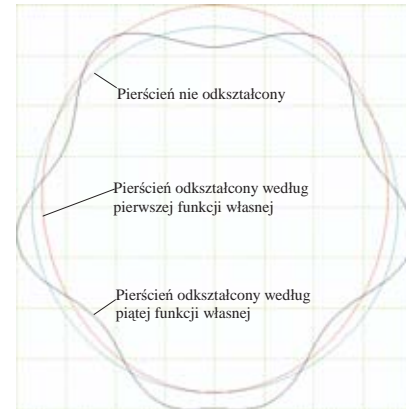


### 3.2. Pierścień opadający na sprężystą podpore

Pierścień o promieniu  $r = 0.5$  [m] rys.3.10, wykonany jest z paska blachy stalowej o grubości 1[mm], szerokości 10 [mm], module sprężystości  $E=2.0 \cdot 10^5$  [MPa] i gęstości 7850 [kg/m<sup>3</sup>]. Pierścień posiadający ciężar  $Q$  spada na sprężystą podpore z prędkością początkową  $V_0=2$ [m/s]. Od momentu zetknięcia się pierścienia z prętem stanowiącym podpore o sztywności  $(EA/L)$ , punkt styku jest punktem wspólnym w ruchu układu.



Rys. 3.10. Geometria pierścienia  
Fig. 3.10. The geometry of the ring



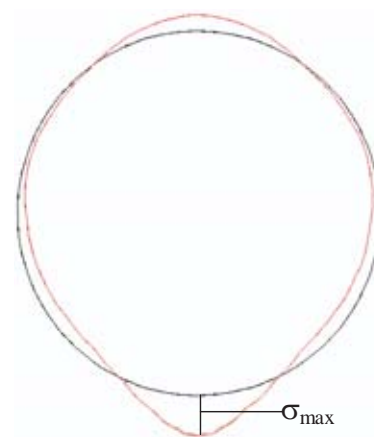
Rys. 3.11. Postacie pierwszej i piątej funkcji drgań własnych  
Fig. 3.11. Forms of the first and fifth function of free vibrations

Na rys. 3.11 przedstawiono postać pierwszej i piątej funkcji określonej z rozwiązania zagadnienia własnego. Okres drgań odpowiadający pierwszej postaci drgań własnych wynosi  $T_1=0.6806$ [s], natomiast dziesiątej funkcji własnej  $T_{10}=0.0108$ [s]. Do całkowania równań ruchu, na podstawie kolejnych eksperymentów, przyjęto krok czasowy  $\Delta t=0.005$ [s] czyli równy połowie okresu drgań dziesiątej funkcji własnej.

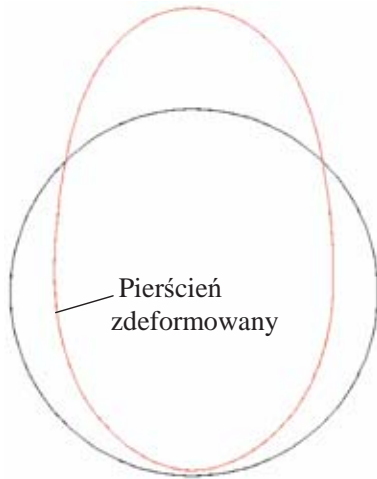
Równanie ruchu rozwiązywano przyrostowo, przy założeniu dużych przemieszczeń przyjmując, że krok czasowy stanowi o przyroście obciążenia. Przemieszczenia dla dwóch skrajnych wychyleń pierścienia przedstawiono na rys. 3.12 i rys. 3.14. Rozkład naprężeń odpowiadających tym przemieszczeniom, przedstawiono na rys. 3.13 i rys. 3.15. W trakcie ruchu pierścienia występuje propagacja fali naprężenia wzdłuż jego osi. Przyjęty do obliczeń krok czasowy i podział na elementy muszą zapewniać właściwy przepływ energii wewnętrznej od pierścienia do pręta podpierającego.



Rys. 3.12. Kształt pierścienia w wyniku deformacji ( $W_{max}=0.238$ [m])po czasie  $t=0.22$ [s]  
Fig. 3.12. The shape of the ring as result of the deformation ( $W_{max}=0.238$ )[m]after the time  $t=0.22$ [s]

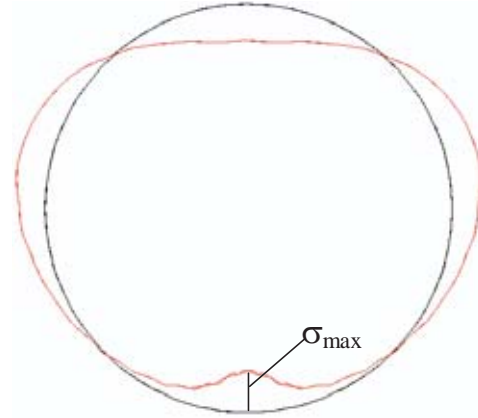


Rys. 3.13. Naprężenia zredukowane w pierścieniu ( $\sigma_{max}=382$  [MPa])  
Fig. 3.13. Reduced stresses in the ring ( $\sigma_{max}=382$  [MPa])



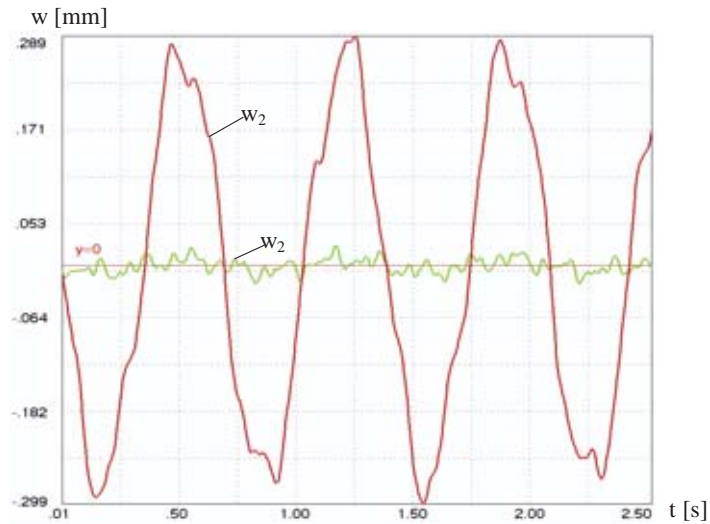
Rys. 3.14. Deformacja pierścienia po czasie  $t=0.475$  [s], ( $W_{max}=0.276$ [m])

Fig. 3.14. The deformation of the ring after the time  $t=0.475$  [s], ( $W_{max}=0.276$ )[m]



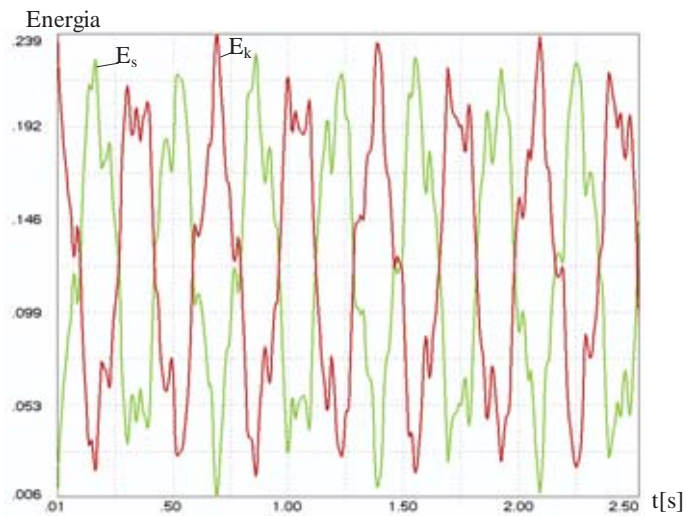
Rys. 3.15. Naprężenia zredukowane w pierścieniu po czasie  $t=0.475$  [s] ( $\sigma_{max}=255$  [MPa] )

Fig. 3.15. Reduced stresses in the ring after the time  $t=0.475$  [s]( $\sigma_{max}=255$  [MPa])



Rys. 3.16. Przesunięcia skrajnych punktów pierścienia w czasie [ $w_1= w(0,-r,t)$ ,  $w_2=w(0,r,t)$  ]

Fig. 3.16. Dislocations of extreme points of the ring in time [ $w_1= w(0,-r, t)$ ,  $w_2=w ](0, r, t)$



Rys. 3.17. Zmiana energii kinetycznej  $E_k$  i energii sprężystej  $E_s$  w czasie ruchu pierścienia

Fig. 3.17. The change of the kinetic energy of  $E_k$  and elastic energy  $E_s$  in time movement of the ring

Przemieszczenia punktów pierścienia, skrajnie położonych na osi y (rys.3.10), w czasie t przedstawiono na rys.3.16. Przemieszczenie dolnego punktu pierścienia jest jednocześnie przemieszczeniem pręta podpierającego. Właściwe zapewnienie przepływu energii wewnętrznej potwierdza wykres zmiany w czasie energii kinetycznej  $E_k$  i energii sprężystej  $E_s$  przedstawiony na rys.3.17. Przy nie właściwej dyskretyzacji przestrzeni i czasu wystąpi dysypacja energii wewnętrznej układu.

Jakakolwiek zmiana sztywności lub masy rozpatrywanego układu, wymaga osobnego eksperymentu numerycznego celem dopasowania modelu obliczeniowego ze względu na dyskretyzację przestrzeni i czasu. Zagadnienie się wyraźnie komplikuje, gdy rozpatrujemy więzy jednostronne połączenia pierścienia z prętem podpierającym. Zapewnienie właściwego przepływu energii wewnętrznej wymaga stosowania zmiennego kroku całkowania po czasie.

### 3.3. Opis impulsu ciśnienia

Intensywność ciśnienia  $p(t)$  na froncie fali powodowanej wybuchem ładunku podwodnego, obliczana jest według historycznej zależności Cole'a [1]:

$$p(t) = p_m e^{\left(\frac{-t}{\Theta}\right)}, \quad (3.29)$$

$$\text{gdzie: } p_m = 52.3 \left[ \frac{\sqrt[3]{M}}{R} \right]^{1.13}, \quad \Theta = \frac{0.093 \sqrt[3]{M} \left[ \frac{\sqrt[3]{M}}{R} \right]^{(-0.22)}}{1000},$$

$p$  – ciśnienie [MPa],

$t$  – czas [s],

$R$  – odległość ładunku od punktu, w którym poszukujemy ciśnienia,

$M$  – masa ładunku [kg].

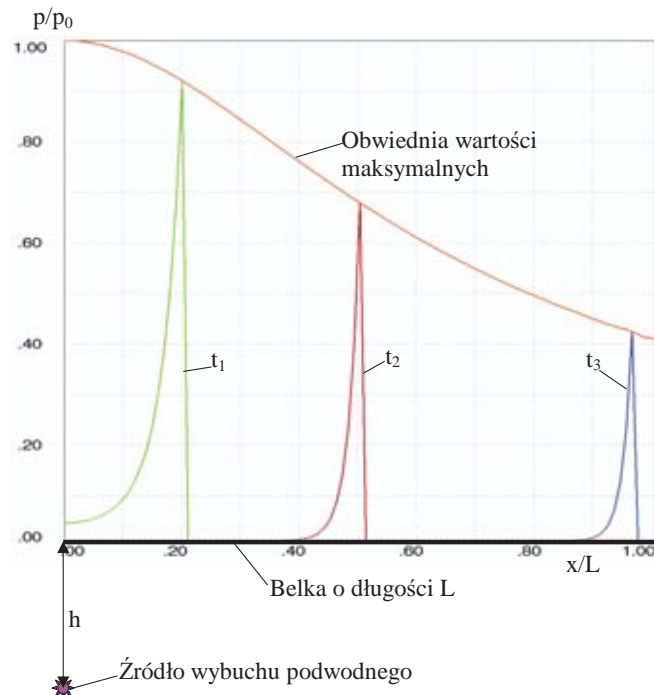
Parcie działające na poszycie okrętu, traktowanego jako sztywna przegroda, zależne jest od kąta padania, czyli od kąta między normalną do czoła frontu fali ciśnienia i normalną do przegrody.

Rozpatrzmy pływającą belkę o długości  $L$  rys.3.18. Pod belką wystąpił wybuch ładunku o masie  $M$  na głębokości  $h$ . Wzdłuż belki propaguje się impuls ciśnienia, zależny od czasu  $t$  oraz współrzędnej belki  $x$ . Na rys.3.18 przedstawiono rozkład ciśnienia dla wybranych trzech chwil czasowych, przy czym czas  $t$  zmieniał się według zależności  $t = x/c_f$  gdzie  $c_f$  jest prędkością fali akustycznej w wodzie. Na rysunku tym zaznaczono również obwiednie wartości maksymalnych ciśnienia występujących w kolejnych chwilach czasowych.

Zauważmy, że zwyczajowo używane pojęcie impulsu, w zasadzie określone jest wzorem:

$$I = \int_0^{t_1} p_m f(\tau) d\tau, \quad (3.30)$$

gdzie  $p_m$  jest wartością maksymalną ciśnienia a funkcja  $f$  określa jego zmianę w czasie  $t_1$ . Jeżeli będziemy zwiększać wartość  $p_m$  i zmniejszać czas  $t_1$  tak aby wartość impulsu była stała to skutki działania impulsu na rzeczywisty układ lekko sprężysty będą coraz mniejsze. Stąd wniosek, że czas przekazywania energii do rozpatrywanego układu ma istotny wpływ na jego parametry ruchu.



Rys. 3.18. Graficzna prezentacja propagacji ciśnienia wzdłuż osi belki  
 Fig. 3.18. The graphic presentation of the pressure propagation along the bar axis

Jeżeli do rozwiązania zagadnienia stosujemy metodę numeryczną to czas  $t$  zmienia się w sposób rekurencyjny według wzoru:

$$t = i \Delta t \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots$$

Wartość kroku  $\Delta t$  musimy przyjąć taką aby można opisać zmianę impulsu w czasie. Jednakże wtedy powstaje problem doboru optymalnej dyskretyzacji przestrzeni rozważanego układu. Dyskretyzacja przestrzeni musi być tak dokonana aby zapewnić odpowiedni charakter przepływu energii z elementu do elementu sąsiedniego. Dla elementów prętowych, ściskanych lub rozciąganych, optymalną długość elementu  $\Delta l$  określamy z zależności (uzasadnienie tego wzoru w przykładzie poniżej):

$$\frac{\rho \Delta l^2}{\alpha E \Delta t^2} \leq 1, \quad (3.31)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością materiału,  $E$  modułem sprężystości,  $\alpha$  pewnym współczynnikiem zależnym od stosowanej metody całkowania. Parametr  $\alpha$  dobierany jest na podstawie eksperymentu numerycznego. W przypadku elementów płaskich lub przestrzennych  $\Delta l$  jest pewnym wymiarem charakteryzującym wielkość elementu. Podczas całkowania krok czasowy  $\Delta t$  obowiązuje dla całego układu równań, dlatego wymiar charakterystyczny musi być tak dobrany aby uwzględnił zmianę stosunku masy do sztywności konstrukcji wewnątrz rozpatrywanego obszaru. Czoło fali wyznaczone numerycznie nie może wyprzedzać czoła fali fizycznej. W zagadnieniach opisywanych równaniem parabolicznym wprowadza się umowne czoło fali.

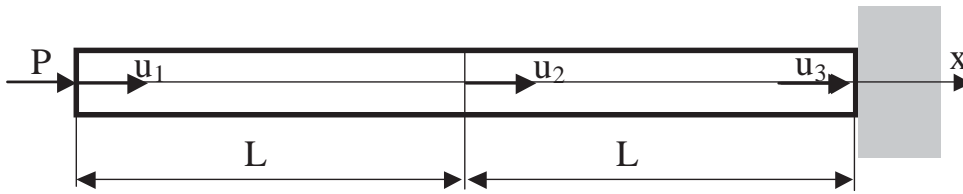
Dodatkową trudność stanowi fakt, że równania ruchu dla zginanych elementów konstrukcyjnych, wyrażone w przemieszczeniach, są bicharmoniczne i prędkość propagacji fali wykazuje pewną dyspersję. Dlatego w konstrukcjach złożonych, gdy występują elementy tylko ściskane i elementy tylko zginane, dobór stosunku wymiaru charakterystycznego do wartości kroku czasowego wymaga pewnego doświadczenia. W literaturze dotyczącej tematu Autorzy proponują aby obliczyć pierwszą częstość własną, rozpatrywanej konstrukcji i przyjąć krok  $\Delta t$  równy jednej dziesiątej podstawowego okresu drgań a następnie poszukiwać wartości optymalnej na podstawie eksperymentu numerycznego.

Jeżeli impuls ciśnienia zmienia się tylko w czasie, natomiast nie zmienia swego położenia to do rozwiązania równania ruchu możemy zastosować metodę rozdzielania zmiennych. Musimy wtedy obciążenie rozwinąć w szereg względem funkcji własnych i częstości własnych. Aby szereg taki opisywał zmianę pojedynczego impulsu to należało by wziąć pod uwagę ponad dwadzieścia pierwszych częstości własnych. Tylko wysokie częstości własne prawidłowo opiszą właściwy charakter propagacji energii wzdłuż osi belki.

Jeżeli do rozwiązania zagadnienia zastosujemy metodę elementów skończonych (MES) [2,3,4,6,7] to wykorzystując do wyznaczania funkcji własnych jedną z metod numerycznych wiadomo, że funkcje własne powyżej dziesiątej wyznaczane są z małą dokładnością. Z tego względu lepsze wyniki daje metoda rekurencyjnego całkowania po czasie.

*Przykład:*

Pręt o długości  $2L$  i przekroju  $F$ , obciążono nagle siłą  $P$  przyłożoną do lewego końca rys.3.19.



Rys. 2.19. Obciążenie pręta  
Fig. 2.19. The bar load

Pręt podzielimy na dwa elementy dwuwęzłowe i uwzględniając warunek brzegowy na prawym końcu pręta, równanie ruchu w opisie dyskretnym będzie miało postać

$$\frac{E F}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \frac{\rho F L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\text{lub} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \frac{L}{a^2} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

gdzie  $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  jest prędkością fali w pręcie natomiast  $\tilde{P} = \frac{P L}{E}$ . Stosując do całkowania równań ruchu metodę Newmarka, przy zerowych warunkach początkowych, otrzymamy po czasie  $\Delta t$  następujący układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \frac{L^2}{a^2} \frac{4}{6 \Delta t^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha+1 & \alpha-1 \\ \alpha-1 & 4\alpha+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

gdzie  $\alpha = \frac{L^2}{a^2} \frac{2}{\Delta t^2}$ . Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy

$$u_1 = P \frac{(4\alpha+2)}{J}, \quad u_2 = -P \frac{\alpha-1}{J}, \quad (3.34)$$

gdzie  $J = (2\alpha+1)(4\alpha+2) - (\alpha-1)^2 = 7\alpha^2 + 10\alpha + 1$ . Czyli dla  $\alpha > 1$  przemieszczenie punktu drugiego będzie przeciwne niż przemieszczenie punktu pierwszego.

Metodą elementów skończonych opisujemy zagadnienie w sposób całkowy, czyli rozwiązanie jest wartością średnią z udziału różnych przyczyn. Stąd w konstrukcjach złożonych



geometrycznie, jeżeli warunek  $\alpha > 1$  nie będzie spełniony lokalnie to rozwiązanie dla całej konstrukcji może być znalezione z wystarczającą dokładnością.

#### 4. Refrakcja fali

Rozważymy ciała znajdujące się w płaskim stanie naprężenia. Mamy dwie prędkości propagacji fal sprężystych,  $a_1$  prędkość fali podłużnej i  $a_2$  prędkość fali poprzecznej wyrażające się wzorami (1.2). Prędkość  $a_1$  określa propagację zmian objętościowych a prędkość  $a_2$  propagację zmian postaciowych. W jednoosiowym stanie naprężenia prędkość fali (nazywana często prędkością akustyczna) jest dana wzorem (1.4). Wartości tych prędkości układają się według następującej nierówności:

$$a_2 < a_0 < a_1. \quad (4.1)$$

Rozpatrzmy ciała, których parametry materiałowe określone są przez moduł sprężystości podłużnej  $E$  (moduł Younga), współczynnik Poissona  $\nu$  i gęstość  $\rho$ . Stałą sprężystości poprzecznej  $G$  określamy wzorem:

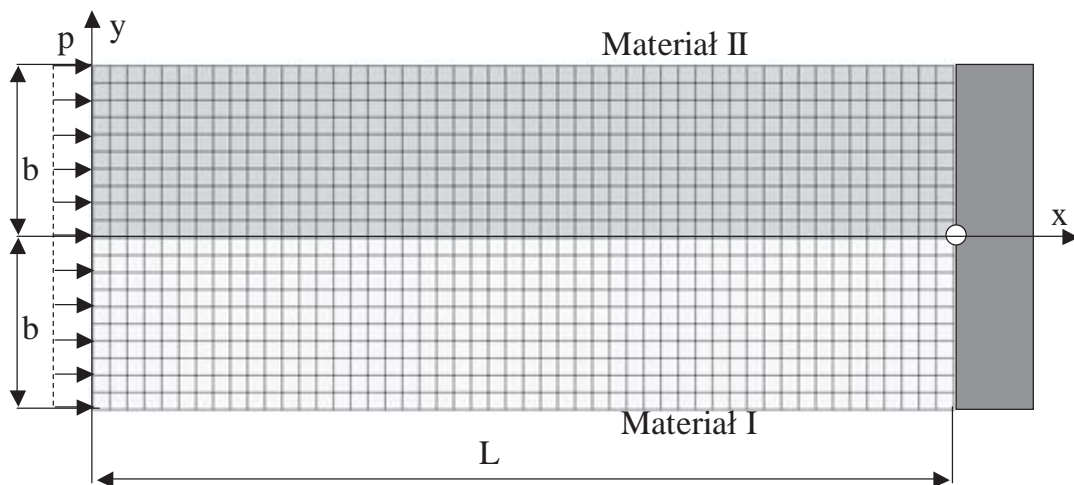
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.2)$$

Stosując do rozwiązania zagadnienia propagacji fal sprężystych MES zobaczymy, że w interpretacji wyników obliczeń możemy wyodrębnić wpływ fali podłużnej i fali poprzecznej. Możemy również wykazać działanie zasady Huygensa-Fresnela [5], zgodnie z którą zaburzenie w dowolnym punkcie do którego dotarła fala w danym momencie, jest źródłem fali elementarnej, natomiast obwiednia tych fal tworzy czoło fali zaburzenie w następnym momencie.

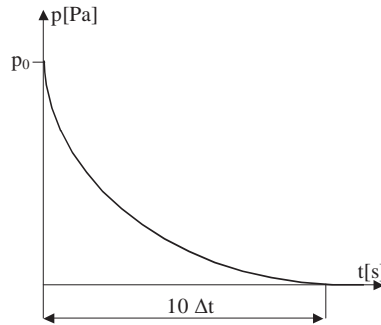
#### 4.1 Tarcza niejednorodna.

##### Refrakcja

Tarcza prostokątna (sposób jej dyskretyzacji przedstawiono na rys.4.1) obejmuje dwa materiały, o tej samej gęstości  $\rho=7580[\text{kg}/\text{m}^3]$  i współczynniku  $\nu=0.25$ , różnią się tylko modułem  $E$ . Charakterystykę materiałową określa tabela 4.1. Na swobodną krawędź tarczy ( $x=0$ ) działa impuls ciśnienia w kierunku osi  $x$ .



Rys. 4.1. Tarcza prostokątna o jednostkowej grubości i wymiarach  $L=144[\text{m}]$ ,  $b=36[\text{m}]$   
 Rys. 4.1. The rectangular plate of unitary thickness and dimensions:  $L=144[\text{m}]$ ,  $b=36[\text{m}]$



Rys. 4.2. Zmiana ciśnienia w czasie  
Fig. 4.2. The change of pressure in time

Tab. 4.1. Parametry materiałów  
Tab. 4.1. Parameters of materials

$$\nu = 0.25, \quad \rho = 2500 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

Material	E [Mpa]	$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$	$a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$	$a_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$	$a_1 = \sqrt{\frac{2G}{\rho} \frac{1-\nu}{1-2\nu}} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
I	$8 \cdot 10^3$	$3.2 \cdot 10^3$	$1.789 \cdot 10^3$	$1.131 \cdot 10^3$	$1.959 \cdot 10^3$
II	$2 \cdot 10^3$	$0.8 \cdot 10^3$	$0.894 \cdot 10^3$	$0.566 \cdot 10^3$	$0.980 \cdot 10^3$

Przyjmując rekurencyjną zmianę czasu  $t = (i-1) \Delta t$  ( $i=1,2,\dots$ ) z krokiem czasowym  $\Delta t$  wartość ciśnienia zmienia się w czasie (rys.3.2) według zależności:

$$p(t) = p_0 \left[ 1 - \Delta t \left( \frac{1-i}{11} \right)^2 \right], \quad (4.3)$$

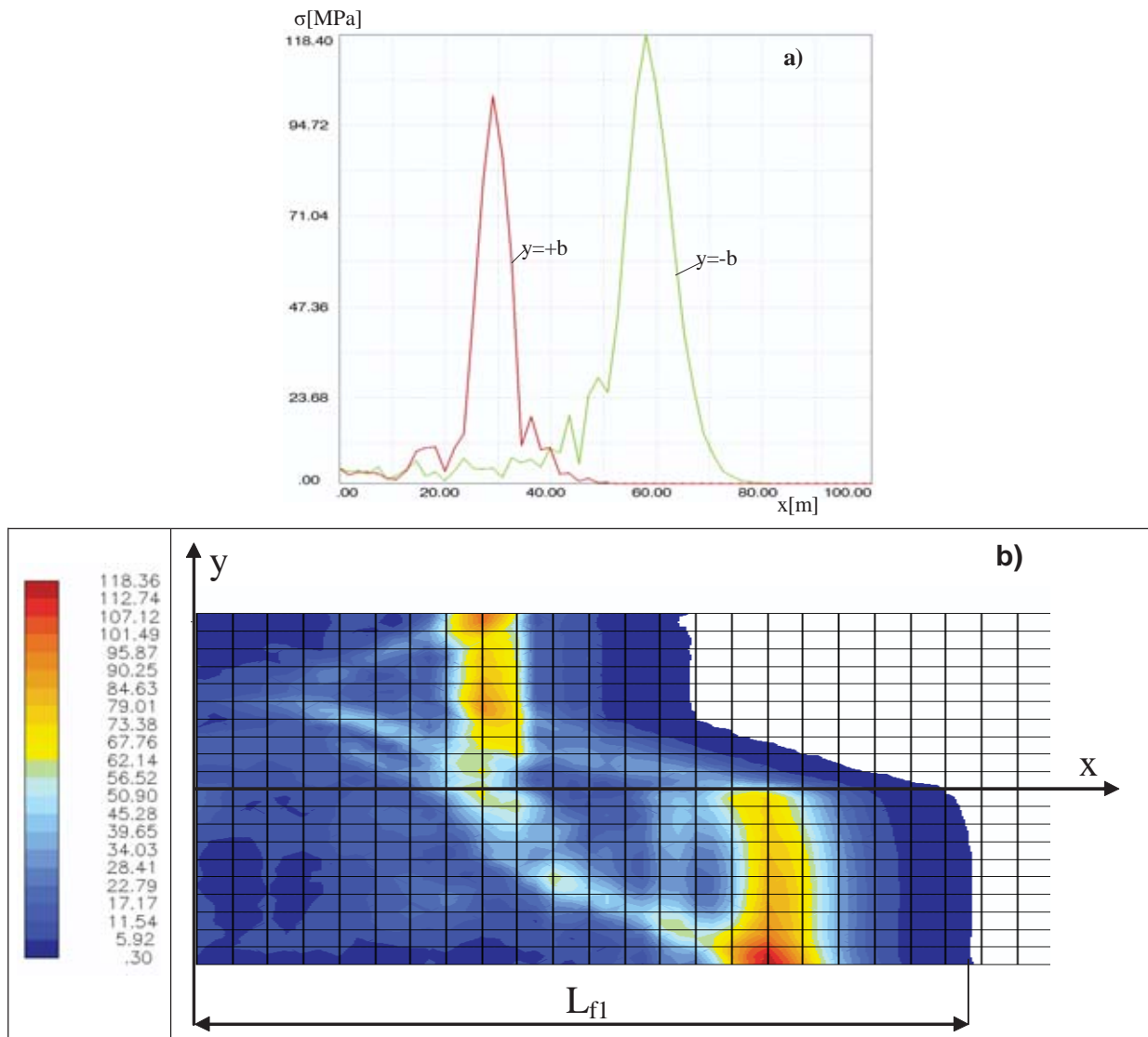
przy  $p_0=5[\text{N/m}^2]$  natomiast dla  $i>11$   $p(t)=0$ .

Rozwiązania poszukiwano za pomocą MES całkując równania ruchu po czasie metodą Newmarka. Wartość kroku czasowego przyjęto  $\Delta t=10^{-3}[\text{s}]$ , odpowiada on czasowi przejścia frontu fali naprężenia o jeden element sztywniejszej części tarczy. Wyniki rozwiązania przedstawiono na poniższych rysunkach dla dwóch chwil czasowych, dla czasu  $t=36\Delta t$  i  $t=81\Delta t$ .

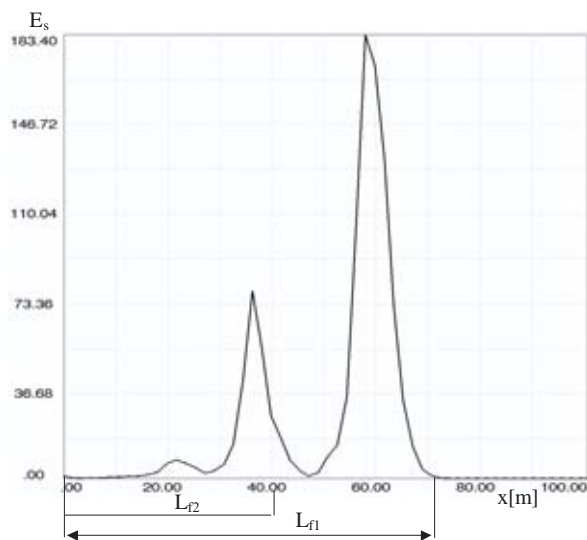
Rozkład naprężeń po czasie  $t=36\Delta t$  przedstawiono na rys.4.3. Na rys.4.3a przedstawiono rozkład naprężenia wzdłuż krawędzi tarczy mniej sztywnej ( $y=b$ ) i wzdłuż krawędzi tarczy bardziej sztywnej ( $y=-b$ ). Na rys.4.3b jest plan warstwiczny rozkładu naprężenia w zaburzonej części tarczy. Propagacja frontu fali, w obu częściach tarczy, zachodzi z prędkością fali podłużnej przy czym w tarczy sztywniejszej zaburzenie wniknęło na odległość dwa razy większą niż w tarczy mniej sztywnej. Na rys.4.4 przedstawiono rozkład gęstości energii sprężystej odniesionej do jednostki masy. Fala podłużna wniknęła na głębokość  $L_{f1}=70.6[\text{m}]$ , natomiast na rysunku tym uwidacznia się wpływ prędkości poprzecznej gdyż tuż za frontem fali poprzecznej ( $L_{f2}=40.8[\text{m}]$ ) występuje drugie maksimum zmiany gęstości energii.

W tarczy mniej sztywnej występują zaburzenia przed frontem fali podłużnej. Zaburzenia zachodzące w sztywniejszej części tarczy generują zaburzenia w części tarczy mniej sztywnej, zgodnie z zasadą Huygensa.

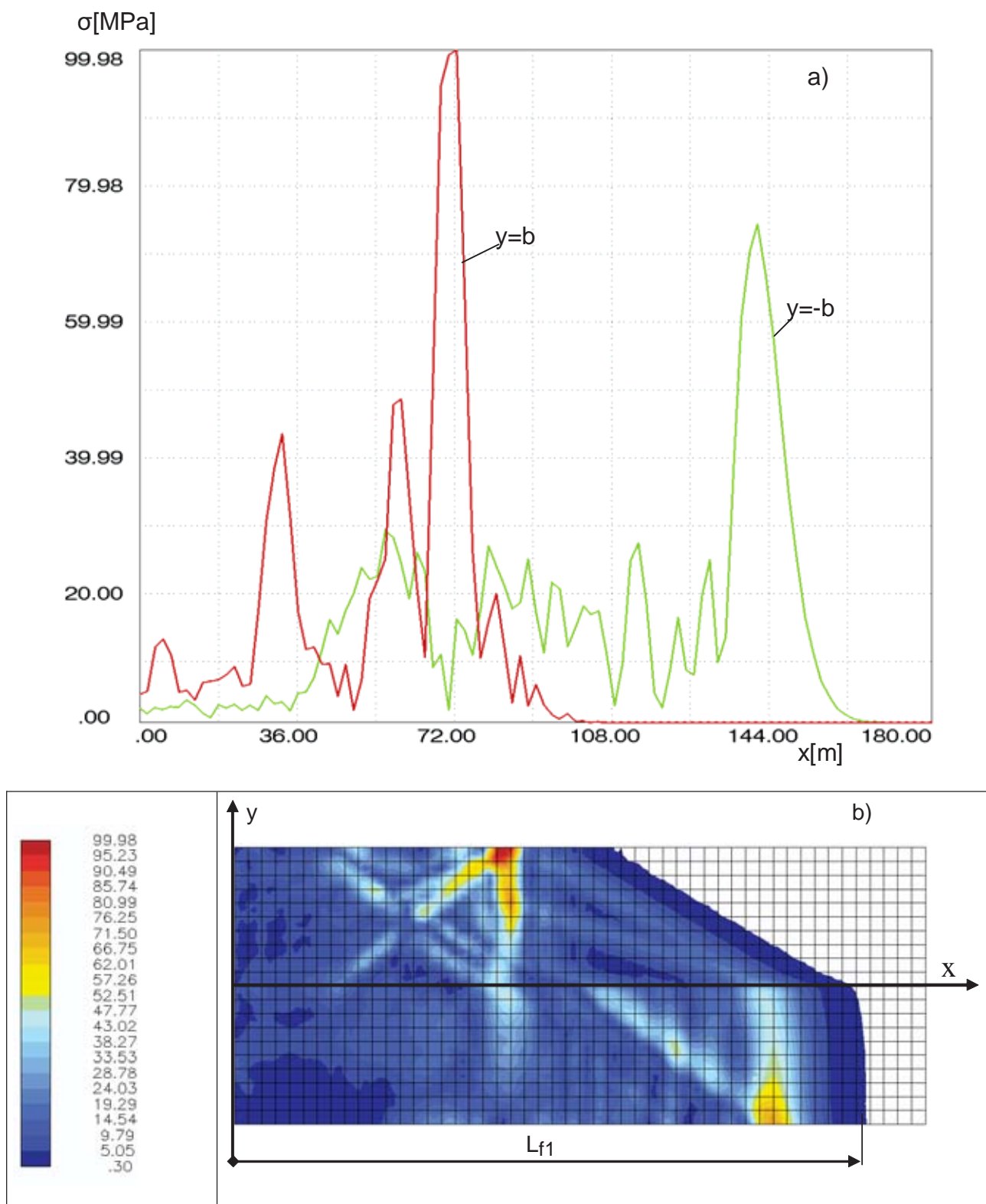
Rozkład naprężeń po czasie  $t=81\Delta t$  przedstawiono na rys.4.5. Na rys.4.5b mamy plan warstwiczny rozkładu naprężeń a na rys.4.5a rozkład naprężeń na krawędziach tarczy I i II. Istotnym w tym przypadku jest, że przed frontem fali podłużnej w tarczy II występują wartości naprężenia większe od zera wygenerowane przez naprężenia tarczy I.



Rys. 4.3. Rozkład naprężenia zredukowanego (według hipotezy Hubera) w tarczy, po czasie  $t=36 \Delta t$   
 Fig. 4.3. Distribution reduced stresses (according to the Huber hypothesis) in the plate after the time  $t=36 \Delta t$



Rys. 4.4. Gęstość energii sprężystej po czasie  $t=36 \Delta t$ , wzdłuż osi x dla  $y=-b/2$   
 Fig. 4.4. Elastic energy density after the time  $t=36 \Delta t$ , along the axis x for  $y=-b/2$

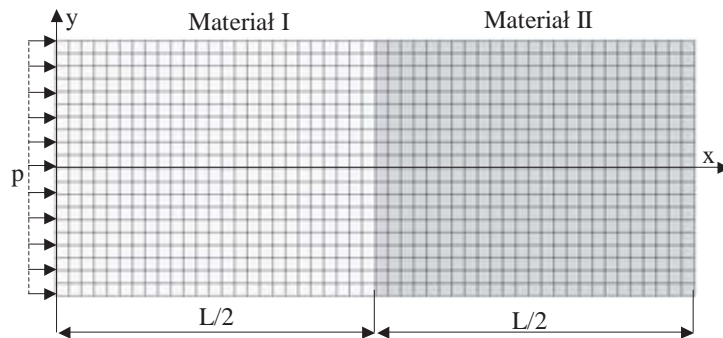


Rys. 4.5. Rozkład naprężenia zredukowanego (według hipotezy Hubera) w tarczy, po czasie  $t=81 \Delta t$   
 Fig. 4.5. The distribution of the lesser (according to the Huber hypothesis) stresses in the plate after the time  $t=81 \Delta t$

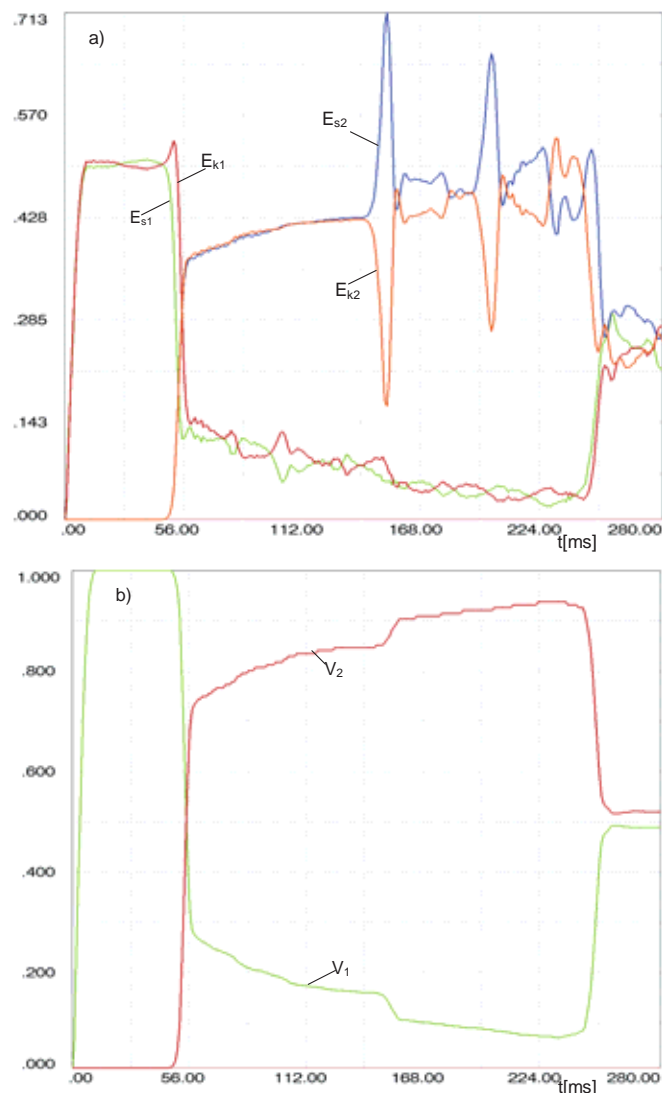
### Odbicie i przenikanie

Tarcza prostokątna o wymiarach i składająca się z materiałów jak w wariancie pierwszym, z tym że własności tarczy zmieniają się w kierunku osi  $x$ . Obciążenie tarczy jest identyczne jak w wariancie pierwszym. Rozważymy dwa przypadki, pierwszy gdy obciążenie działa na

sztyniejszą część tarczy rys.4.6 i zaburzenie przenika do części mniej sztywnej oraz drugi gdy obciążenie działa na mniej sztywną część tarczy i zaburzenie przenika do części bardziej sztywnej rys. 4.8.



Rys.4.6. Sposób pierwszy obciążenia tarczy  
Rys.4.6. The first way loads of plate

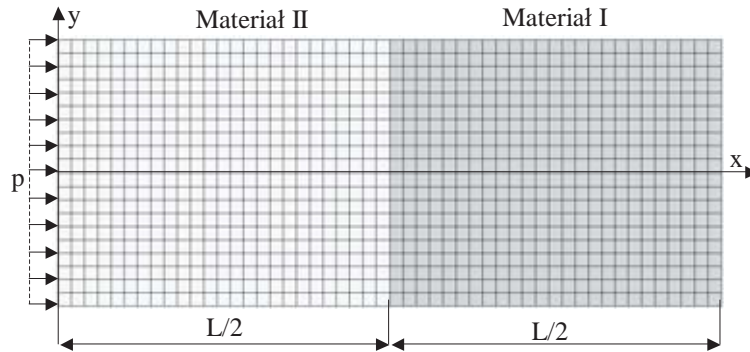


Rys. 4.7 Zmiana energii w czasie  $t$  gdy fala przenika od ciała bardziej sztywnego do ciała mniej sztywnego  
Fig. 4.7. Energy change in time  $t$  when the wave is penetrating from more stiff body to less stiff body

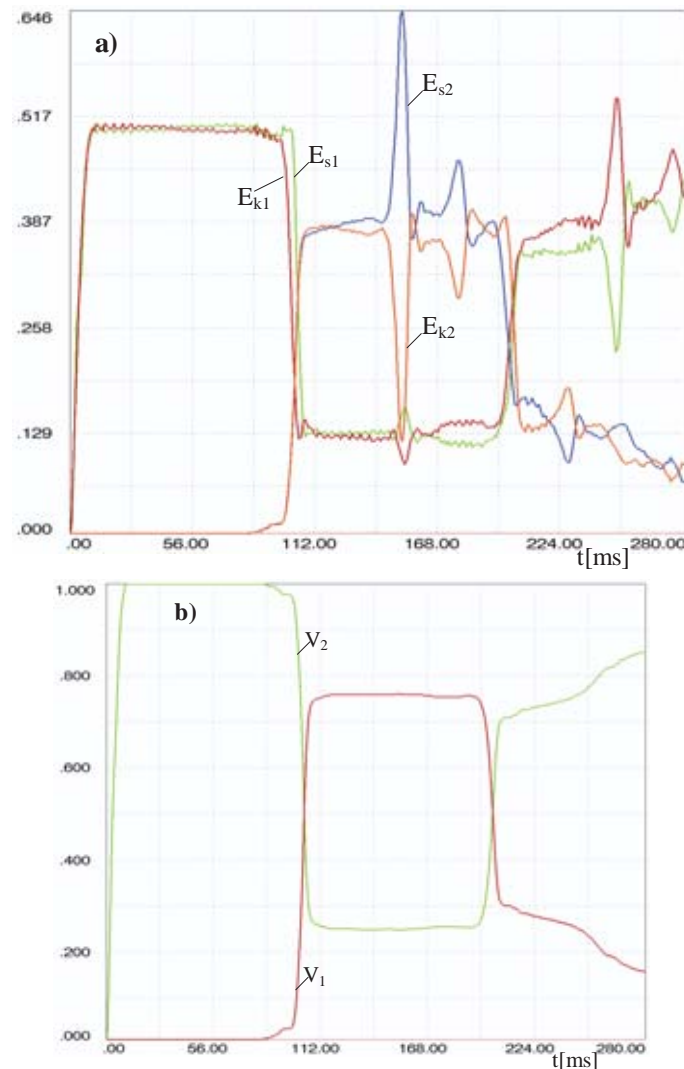
Jako wynik rozwiązania przedstawiono zmianę w czasie energii sprężystej  $E_s$  i energii kinetycznej  $E_k$  oraz energii całkowitej  $V$  obliczanej jako sumę energii sprężystej i energii kinetycznej. Wartości energii obliczano oddzielnie dla obu części tarczy.



Na rys. 4.7. a i rys. 4.7. b przedstawiono zmianę energii w czasie odniesioną do całkowitej pracy sił zewnętrznych dla przypadku gdy fala przenika od ciała bardziej sztywnego do ciała mniej sztywnego.



Rys. 4.8. Sposób drugi obciążenia tarczy  
Fig. 4.8. The second way of the plate loads

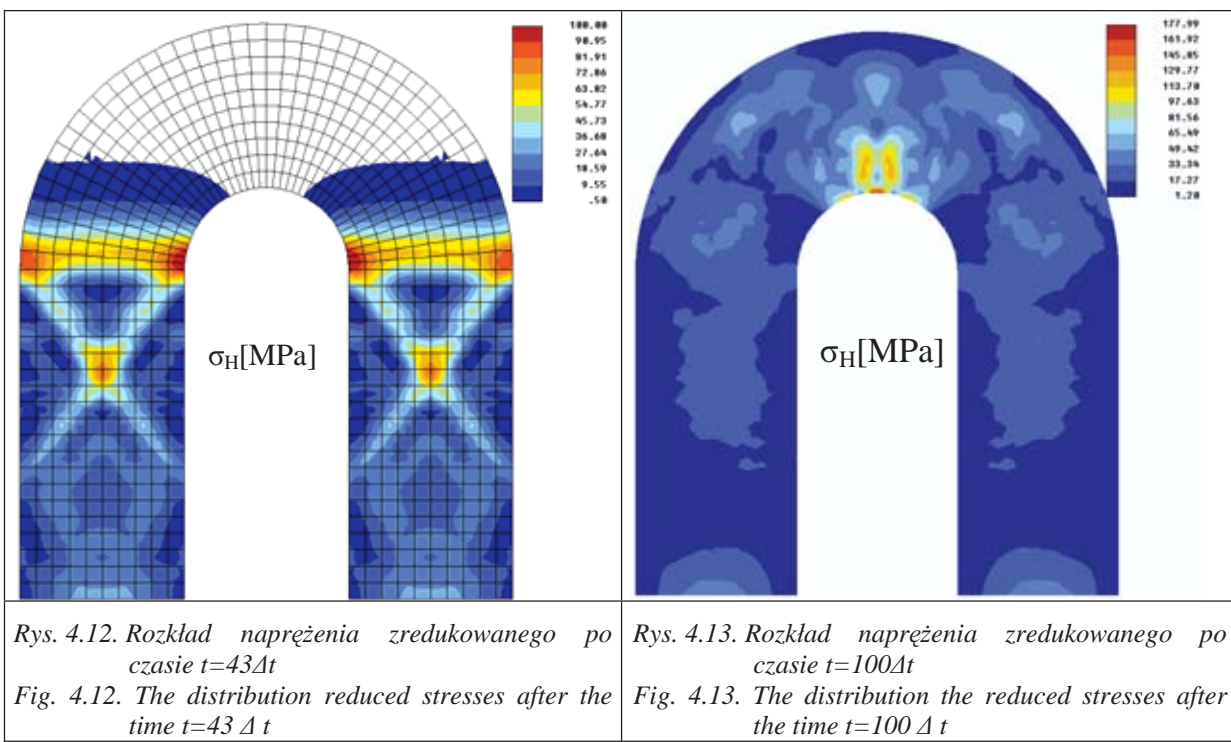
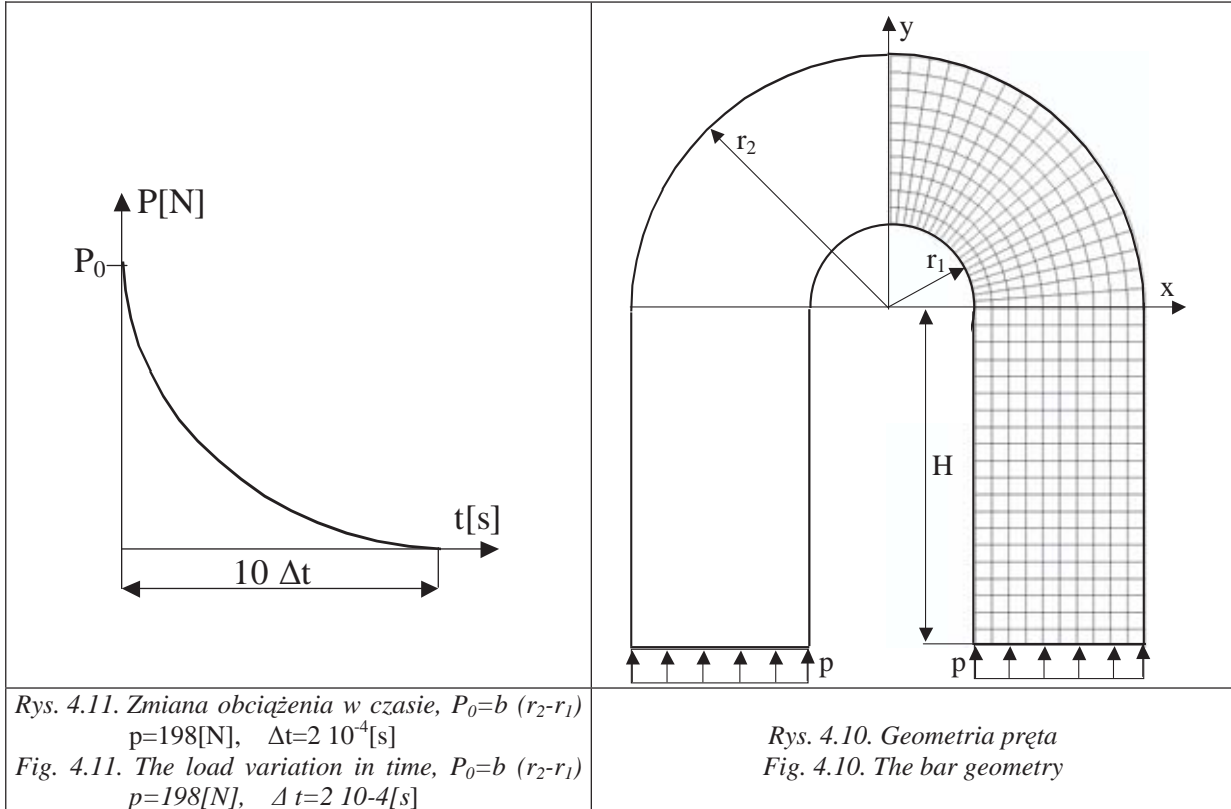


Rys.4.9. Zmiana energii w czasie  $t$  gdy fala przenika od ciała mniej sztywnego do ciała bardziej sztywnego  
Fig. 4.7. Energy change in time  $t$  when the wave is penetrating from less stiff body to more stiff body

Na rys. 4.9. a i rys. 4.9. b przedstawiono zmianę energii w czasie odniesioną do całkowitej pracy sił zewnętrznych dla przypadku gdy fala przenika od ciała mniej sztywnego do ciała bardziej sztywnego.

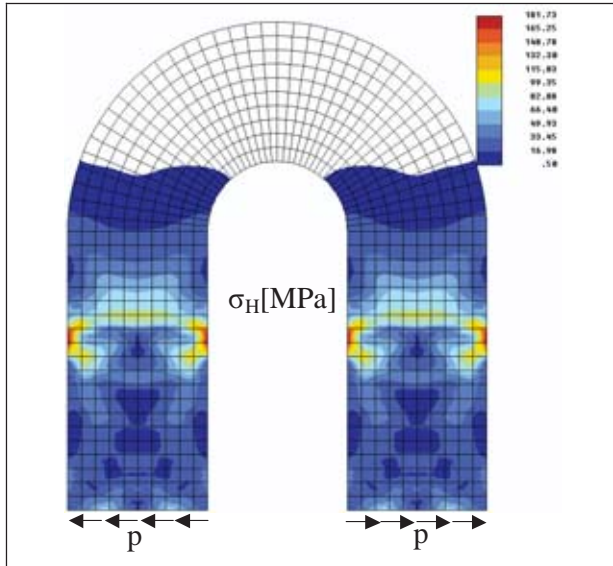
#### 4.2. Pręt wygięty w kształcie podkowy

Stalowy pręt o przekroju prostokątnym i parametrach materiałowych  $E = 2.1 \cdot 10^6 [\text{MPa}]$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $\rho = 7850 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ , wygięto w kształcie podkowy rys.4.10. Wymiary pręta wynoszą  $r_1=10[\text{mm}]$ ,  $r_2=30[\text{mm}]$ ,  $H=40[\text{mm}]$ , grubość  $b=1[\text{mm}]$ . Podkowę obciążono impulsem ciśnienia zmieniającym się w czasie jak na rys. 4.11.

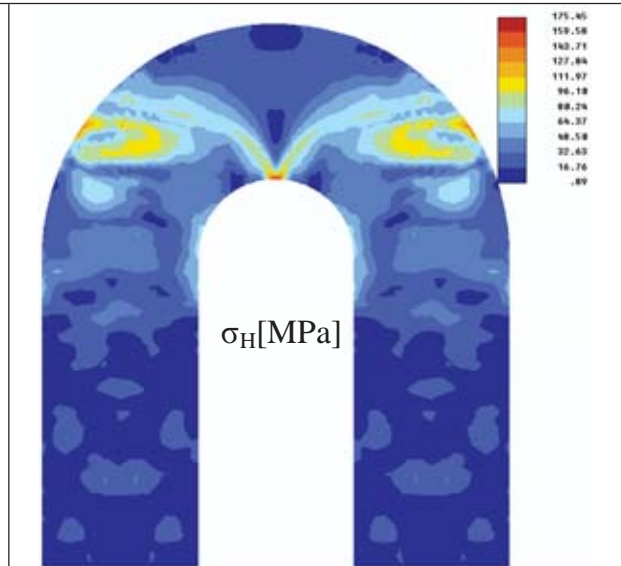


Fala naprężenia propaguje się z prędkością fali podłużnej rys. 4.12, jednakże za frontem fali występuje interferencja fal odbitych od brzegów. Maksymalne naprężenia występują w punkcie  $(x=0, y=r_1)$  po czasie  $t=100 \Delta t$  (rys. 4.13).

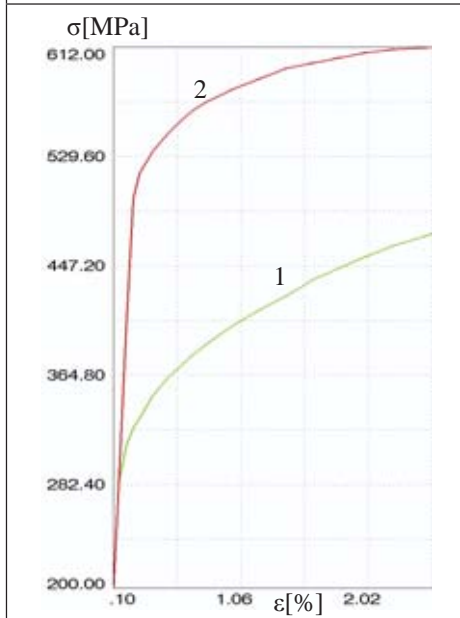
Obraz rozkładu naprężeń zmienia się w sposób zasadniczy (rys. 4.14) gdy rozpatrzmy podkową obciążoną stycznie do krawędzi. Maksymalne naprężenia w punkcie  $(x=0, y=r_1)$  rys. 4.15 występują nieco wcześniej niż w poprzednim przypadku jednakże nie obserwujemy efektu odbicia.



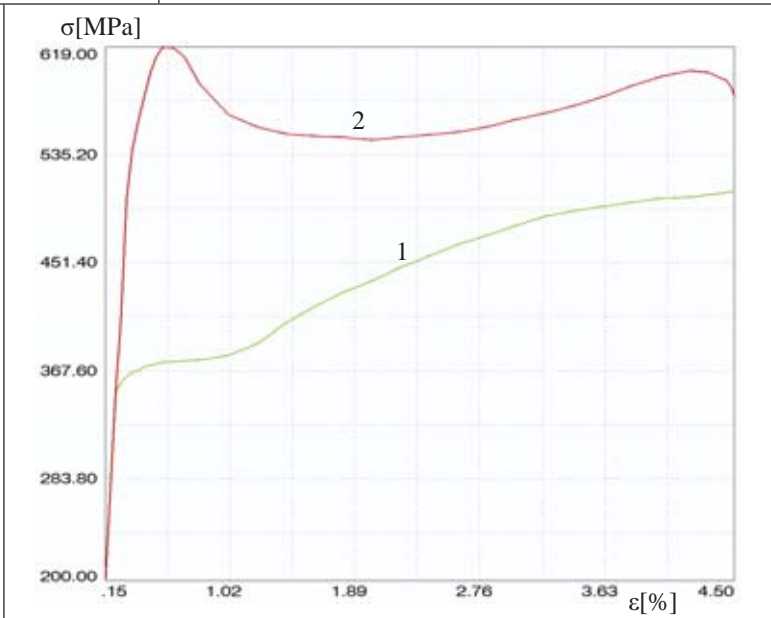
Rys. 4.14. Rozkład naprężenia zredukowanego, po czasie  $t=43\Delta t$   
Fig. 4.14. The distribution the reduced stresses , after the time  $t=43 \Delta t$



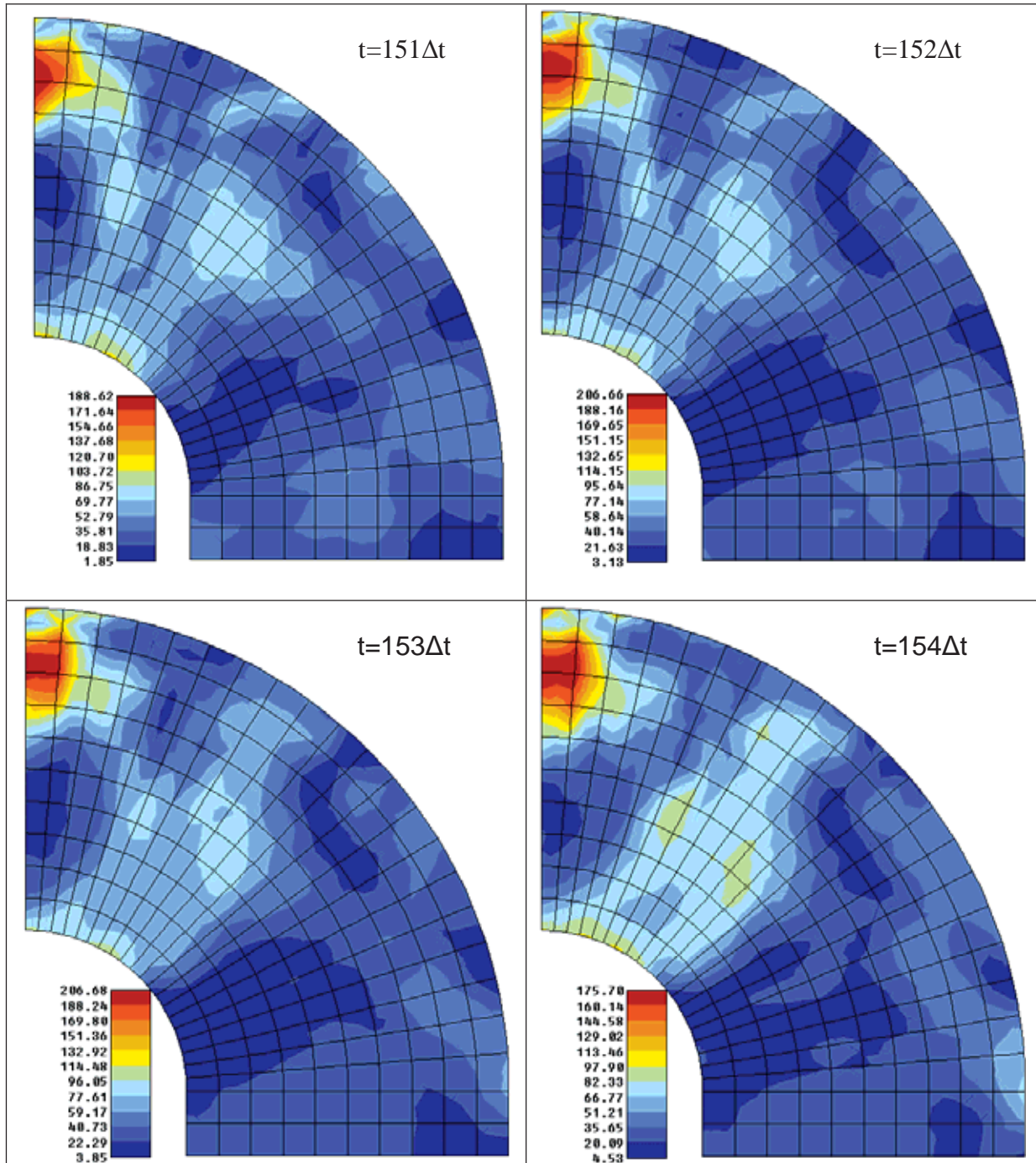
Rys. 4.15. Rozkład naprężenia zredukowanego po czasie  $t=97\Delta t$   
Fig. 4.15. The distribution the reduced stresses after the time  $t=97 \Delta t$



Rys. 4.16. Stal kadłubowa 0H17N12M13-(a)  
krzywa 1 -  $\dot{\epsilon} = 10^{-3}$  [1/s]  
krzywa 2 -  $\dot{\epsilon} = 200$  [1/s]  
Fig. 4.16. Hull steel 0H17N12M13 -(a)-  
curve 1 -  $\dot{\epsilon} = 10^{-3}$  [1/s]  
curve 2 -  $\dot{\epsilon} = 200$  [1/s]



Rys.4.17. Stal kadłubowa 15G2-EH320-(a),  
krzywa 1 -  $\dot{\epsilon} = 10^{-3}$  [1/s]  
krzywa 2 -  $\dot{\epsilon} = 336$  [1/s]  
Fig. 4.17. Hull steel 15G2-EH320 -(a)-  
curve 1 -  $\dot{\epsilon} = 10^{-3}$  [1/s]  
curve 2 -  $\dot{\epsilon} = 336$  [1/s]



Rys. 4.18. Rozkład naprężenia zredukowanego dla kolejnych kroków czasowych po odbiciu Fig. 4.18. The distribution the reduced stresses for following transient steps after reflection

W punkcie, w którym występują naprężenia maksymalne rys.4.18, przyrost naprężeń w czasie  $t=\Delta t$  wynosi  $\Delta\sigma=26[\text{MPa}]$  stąd możemy oszacować prędkość odkształceń:

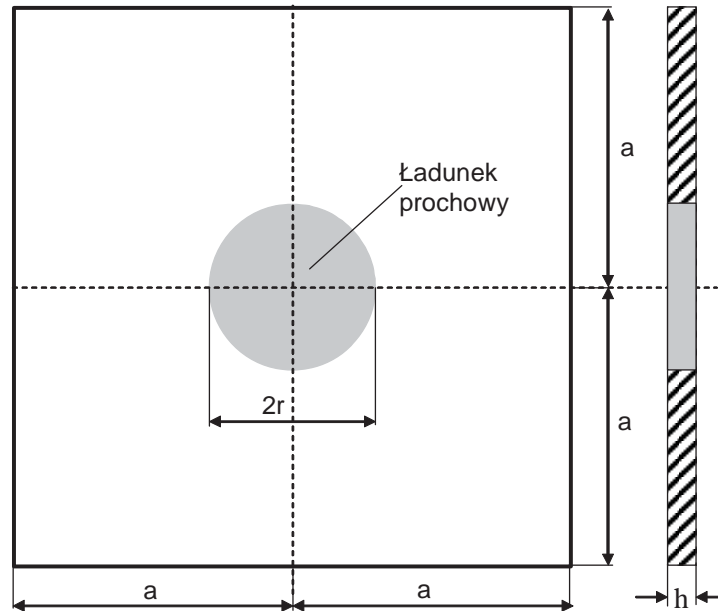
$$\dot{\epsilon} = \frac{\Delta\sigma}{E \Delta t} = \frac{25}{2.1 * 10^5 * 2 * 10^{-4}} = 0.6[1/s]. \quad (4.4)$$

Aby ocenić, w którym punkcie wystąpi ewentualne pęknięcie podkowy musimy wziąć pod uwagę charakterystykę rozpatrywanego ciała uwzględniającą prędkość odkształcenia, którą dla wybranych materiałów przedstawiono na rys. 4.16 i rys. 4.17.



## 5. Interferencja fal

Interferencja czyli nakładanie się fal prowadzące do zwiększenia lub zmniejszenia amplitudy wypadkowej. Jeżeli dwie fale rozchodzą się w ośrodku liniowym (własności ośrodka nie zależą od zachodzących w nim procesów) to obowiązuje zasada superpozycji i drganie wypadkowe jest sumą drgań składowych.



Rys. 5.1. Płytkę stalową o wymiarach,  $a=100$  [mm],  $h=10$  [mm],  $r=30$  [mm]  
 Fig. 5.1. The steel-plate of dimensions,  $a=100$  [mm],  $h=10$  [mm],  $r=30$  [mm]

Kwadratowa płytkę rys. 5.1 o wymiarach  $2a$  na  $2a$  i grubości  $h$  ma wewnątrz otwór o promieniu  $r$ . Wnętrze otworu wypełniono ładunkiem wybuchowym, który następnie odpalono. Powstające gazy prochowe powodują, że na ścianki otworu działa ciśnienie zmienne w czasie.

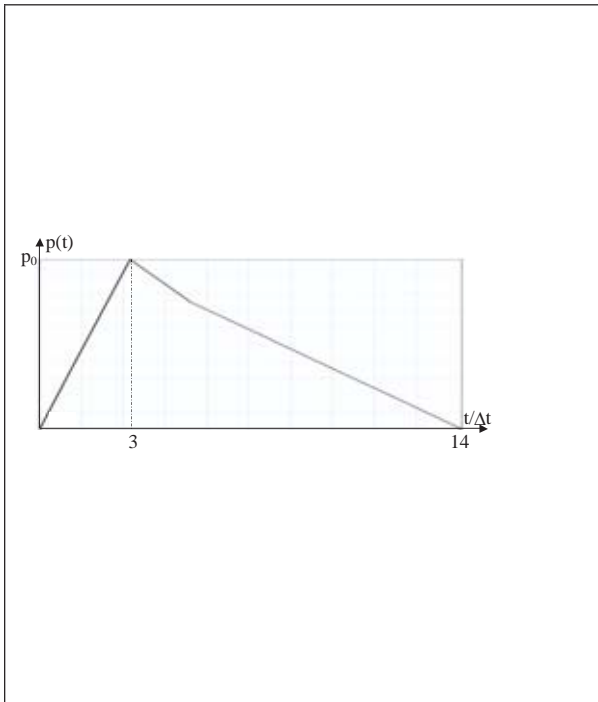
Płytkę jest wykonana ze stali o następujących parametrach: moduł Younga  $E = 2.1 \cdot 10^5$  [MPa], współczynnik Poissona  $\nu=0.3$ , gęstość  $\rho=7850$  [kg/m<sup>3</sup>]. Prędkość podłużna rozchodzenia się fali naprężenia w płytce  $a_1 = 6000$  [m/s]. Czas przejścia fali od ścianki otworu do zewnętrznej ścianki płytki  $t_0 = \frac{a-r}{a_1} = 1.17 \cdot 10^{-5}$  [s]. Przyjmujemy hipotetyczną zmianę w czasie, ciśnienia na ściance

otworu jak na rys. 5.2, gdzie czas trwania impulsu wynosi  $0.75 \cdot 10^{-5}$  [s], czyli jest prawie o połowę mniejszy niż czas  $t_0$ .

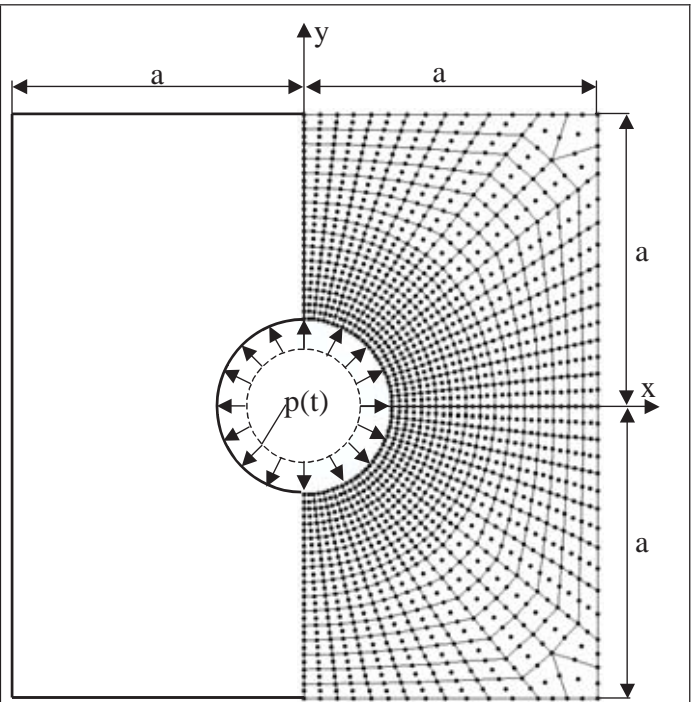
Czas działania ciśnienia oraz charakter jego zmiany w czasie ma istotne znaczenie na rozkład występujących w płytce naprężeń. Propagację fali naprężenia w płytce określono za pomocą rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego, przyjmując płaski stan naprężenia, oraz za pomocą rozwiązania zagadnienia trójwymiarowego – bryłowego. Do dyskretyzacji płytki jako tarczy wykorzystano elementy czworokątne dziewięciowęzłowe rys. 5.3, przyjmując płaszczyznę  $x=0$  jako płaszczyznę symetrii rozpatrywanego zjawiska. Do dyskretyzacji płytki jako bryły zastosowano elementy prostopadłościenne o 27 węzłach, czyli o parabolicznej zmianie poszukiwanej funkcji wewnątrz elementu. Grubość płytki podzielono na dwa elementy. Rozkład węzłów w każdej warstwie bryły jest taki sam jak w zagadnieniu tarczowym.

Rozwiązania zagadnienia propagacji fali naprężenia poszukiwano poprzez rekurencyjne całkowanie równań ruchu metodą Newmarka. Wyniki rozwiązania przedstawiono dla trzech charakterystycznych chwil czasowych w postaci rozkładu naprężeń zredukowanych według hipotezy Hubera, zestawiono wyniki rozwiązania bryłowego i tarczowego.

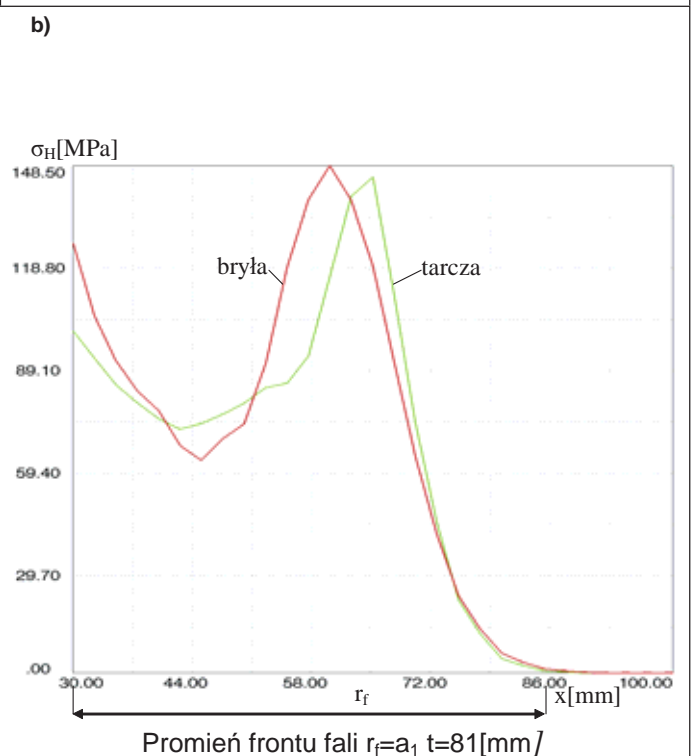
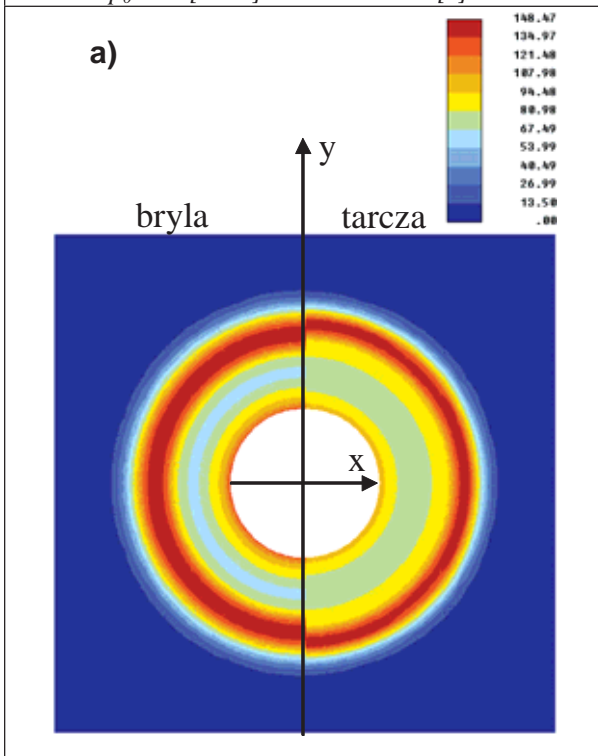




Rys. 5.2. Zmiana ciśnienia w czasie dla  $p_0=369[\text{MPa}]$  i  $\Delta t=5 \cdot 10^{-7}[\text{s}]$   
 Fig. 5.2. The change of pressure in time for  $p_0=369[\text{MPa}]$  and  $\Delta t=5 \cdot 10^{-7}[\text{s}]$

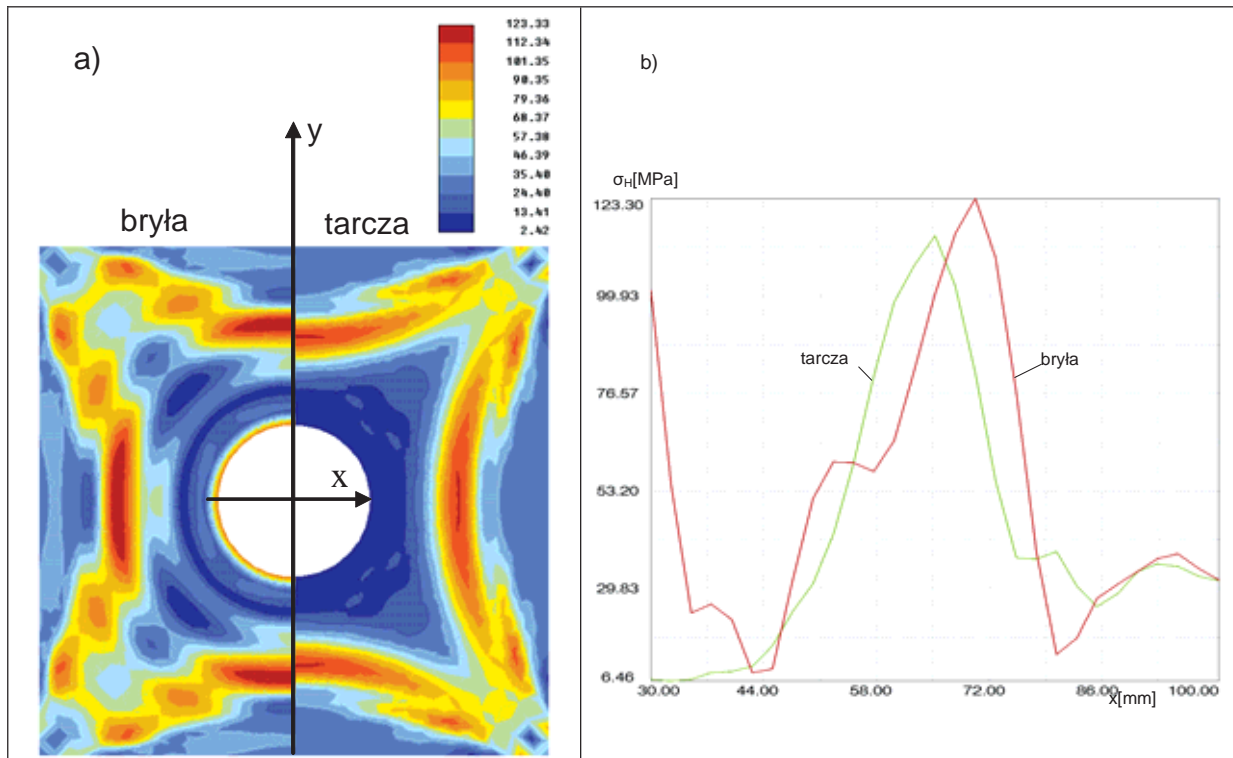


Rys. 5.3. Sposób dyskretyzacji płytki  
 Fig. 5.3. Way of plate discretisation



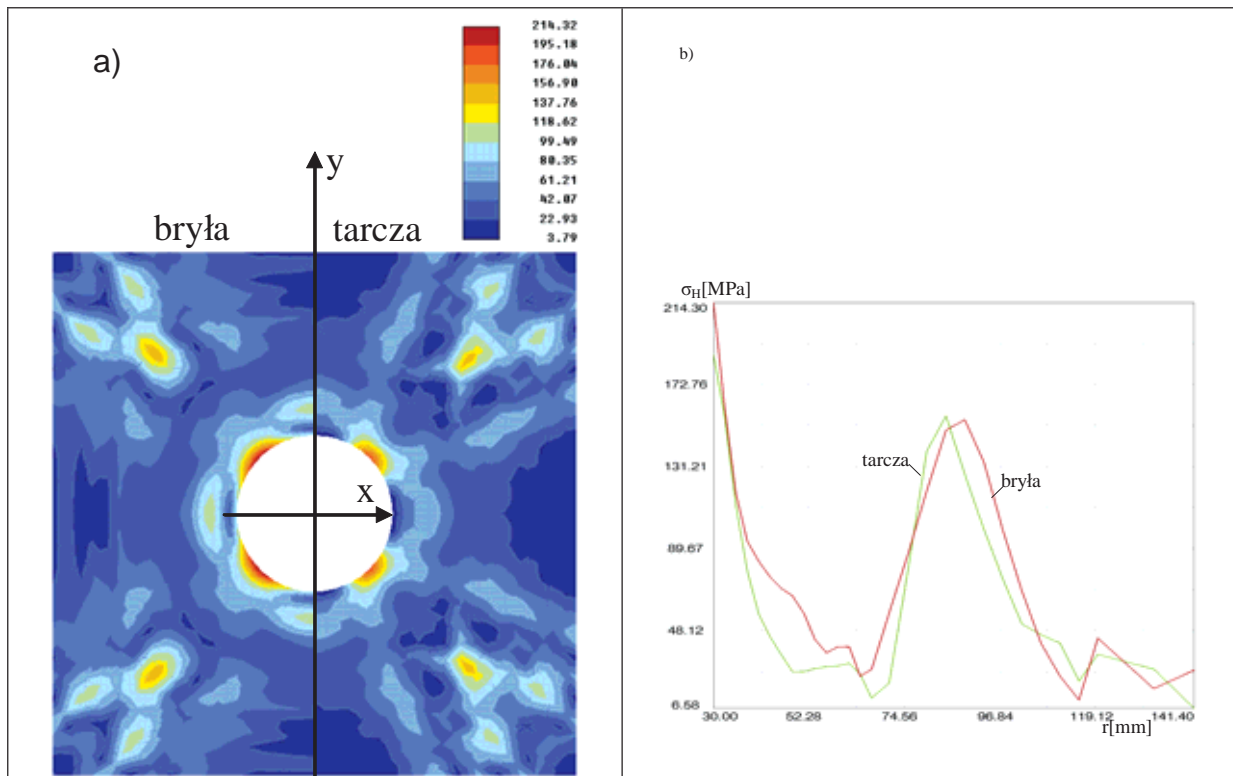
Rys. 5.4. Rozkład naprężeń zredukowanych po czasie  $t=17\Delta t$   
 Fig. 5.4. The reduced stress distribution after time  $t=17\Delta t$

Rys. 5.4 – Koncentryczna propagacja fali naprężenia z prędkością podłużną  $a_1$ . Maksymalna wartość naprężenia występuje tuż za frontem fali poprzecznej. Maksymalna wartość naprężenia w modelu bryłowym propaguje się nieco wolniej niż w modelu tarczowym. Jednakże propagacja frontu fali odbywa się dla obu modeli z jednakową prędkością.



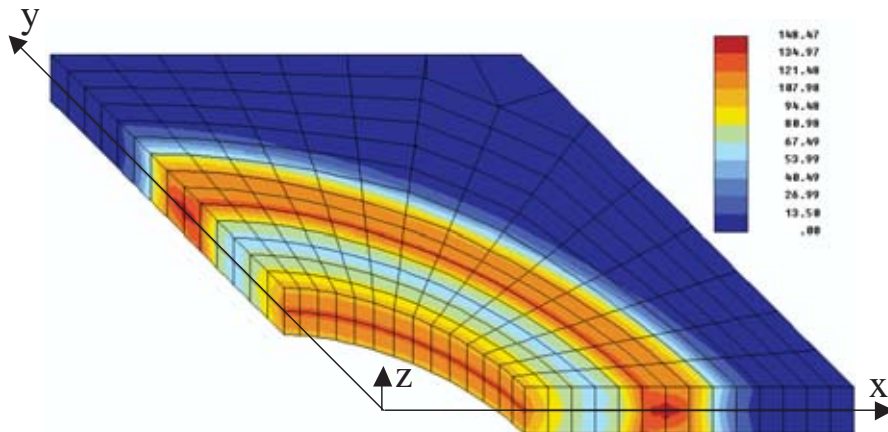
Rys. 5.5. Rozkład naprężeń zredukowanych po czasie  $t=45\Delta t$   
 Fig. 5.5. The reduced stress distribution after time  $t=45\Delta t$

Rys. 5.5 – Widoczna propagacja fali odbitej od brzegów płytki. Istotnym jest czas działania ciśnienia ze względu na interferencję fali odbitej i fali padającej. W rozważanym przypadku fala padająca już nie istnieje. W pobliżu naroży płytki występuje interferencja fal odbitych od brzegów.

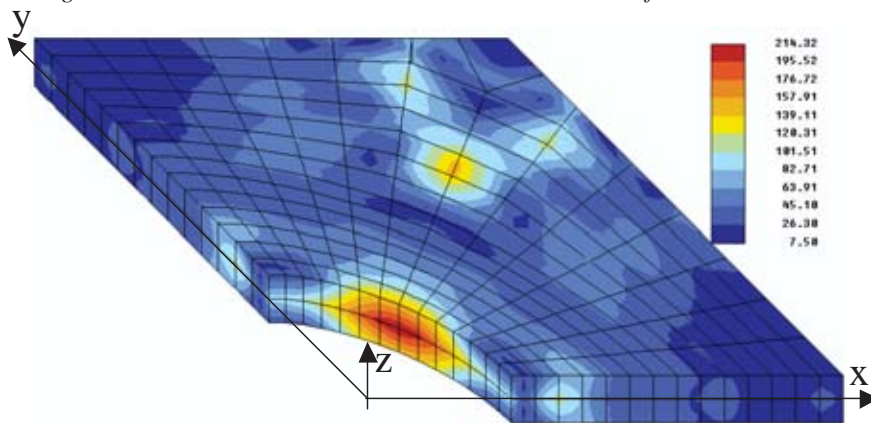


Rys. 5.6. Rozkład naprężeń zredukowanych po czasie  $t=62\Delta t$ , rys. a) plan warstwowy, rys. b) zmiana naprężenia wzdłuż przekątnej płytki  
 Fig. 5.6. The reduced stress distribution after the time  $t=62\Delta t$ , a) the contour map, Fig. b) the change the stresses along the diagonal plate

Rys. 5.6 – Wyraźna interferencja fal odbitych od brzegów płytki powodująca maksymalne wyężenie materiału wzdłuż przekątnej płytki. Tak więc ewentualne pęknięcie płytki nastąpi wzdłuż jej przekątnej.

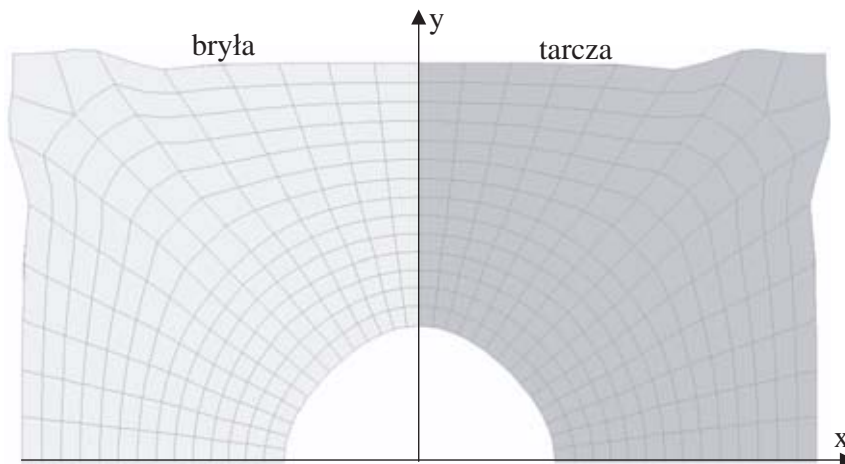


Rys. 5.7. Przestrzenny rozkład naprężen zredukowanych po czasie  $t=17\Delta t$   
 Fig. 5.7. Three-dimensional reduced stress distribution after the time  $t=17\Delta t$



Rys. 5.8. Przestrzenny rozkład naprężen zredukowanych po czasie  $t=62\Delta t$   
 Fig. 5.8. Three-dimensional reduced stress distribution after the time  $t=62\Delta t$

Na rys. 5.7 i 5.8 przedstawiono przestrzenny rozkład naprężenia zredukowanego dla dwóch chwil czasowych. Zauważmy, że maksymalne wyężenie występuje w płaszczyźnie środkowej płytki. W punkcie występowania naprężen maksymalnych (rys.5.8) najmniejsza jest prędkość zmiany odkształceń, stąd najmniejsza jest również granica sprężystości materiału (patrz rys. 5.17 i rys. 5.18).



Rys. 5.9. Deformacja tarczy w płaszczyźnie środkowej po czasie  $t=62\Delta t$  (skala 400:1)  
 Fig. 5.9. The deformation of the disk in the midplane after the time  $t=62\Delta t$  (the scale 400:1)

Poglądowy rysunek deformacji płaszczyzny środkowej płytki pokazano w skali 400:1 na rys. 5.9.

## 6. Charakter propagacji fali w zależności od modelu przestrzennego

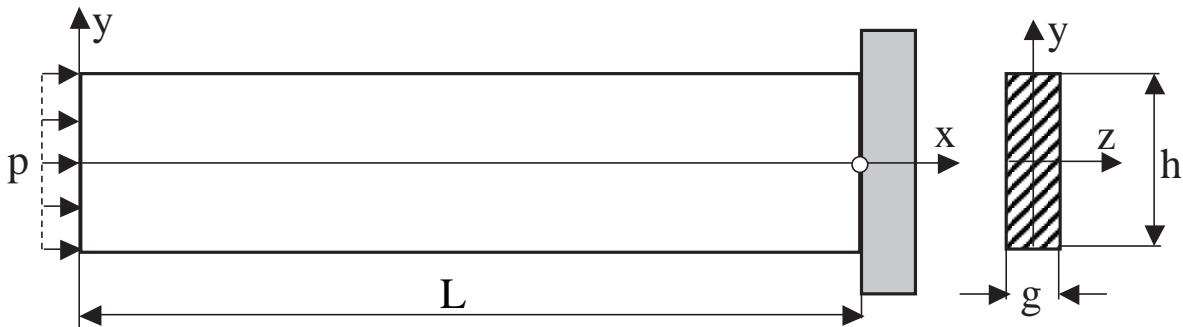
Płytką prostokątną (rys.6.1) o wymiarach  $L=0.24[m]$ ,  $h=0.048[m]$  i  $g=0.024[m]$  utwierdzona jest na prawym końcu, natomiast lewy jest swobodny. Płytką wykonana jest ze stali o module sprężystości  $E = 2.1 \cdot 10^{11}[Pa]$ , współczynnika Poissona  $\nu=0.3$  oraz gęstości  $\rho = 7850 [kg/m^3]$ . Do lewego końca płytki przyłożono nagle ciśnienie  $p=100[MPa]$ .

Powyższe zadanie rozwiążemy za pomocą MES w trzech wariantach, traktując płytkę jako:

- pręt,
- tarczę o grubości  $g$ ,
- bryłę przestrzenną.

Na podstawie poniższych rozwiązań chcemy zobrazować dyspersję numeryczną fali, w zależności od stosowanego modelu ciała.

### 6.1. Płytką prostokątną ściskanie



Rys. 6.1. Płytką o przekroju prostokątnym, ściskana  
Fig. 6.1. Plate of the rectangular section, compressed

#### Rozwiązanie analityczne

Traktując płytkę jako pręt pryzmatyczny, przemieszczenie  $u(x,t)$  (przekroju A o współrzędnej  $x$  w czasie  $t$ ) opisuje równanie:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (6.1)$$

które musi spełniać warunkami początkowe:

$$u(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (6.2)$$

oraz warunki brzegowe:

$$-p = A E \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad u(L,t) = 0, \quad (6.3)$$

gdzie  $a^2 = E/\rho$ .

Rozwiązaniem zadania jest funkcja z przesuniętym argumentem opisująca przemieszczenie pręta przed odbiciem fali naprężenia od utwierdzenia:

$$u(x, t) = \frac{p a}{E} \left( t - \frac{x}{a} \right) \quad \text{dla} \quad \frac{x}{a} \leq t \leq \frac{2L - x}{a}, \quad (6.4)$$

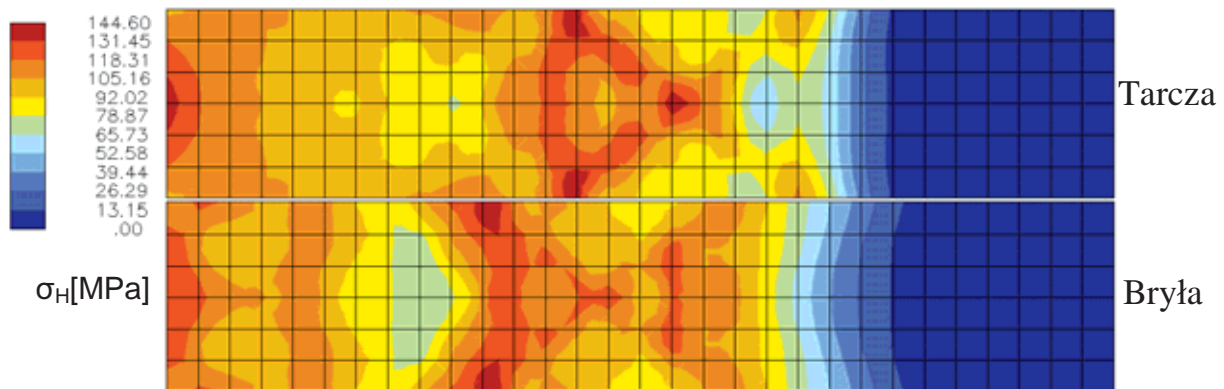
i funkcja będąca superpozycją fali poprzedniej i fali po odbiciu:

$$u(x, t) = \frac{p a}{E} \left( t - \frac{x}{a} \right) - \frac{p a}{E} \left( t + \frac{x}{a} - \frac{2L}{a} \right) \quad \text{dla} \quad \frac{2L - x}{a} \leq t \leq \frac{2L + x}{a}. \quad (6.5)$$

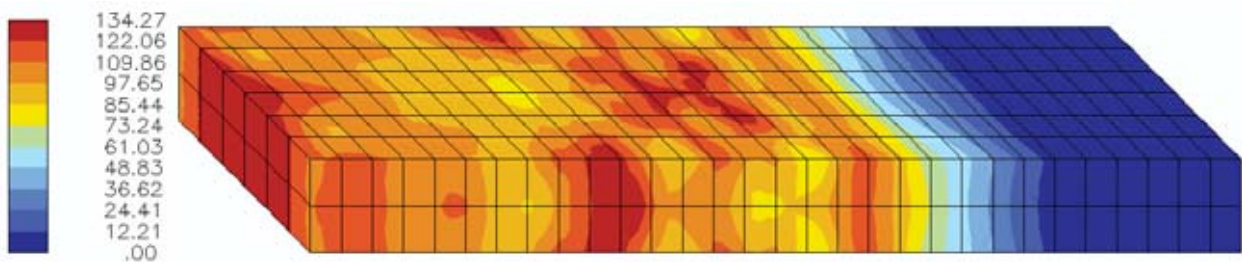
Funkcje te zapewniają nam propagację fali naprężenia o stałej wartości do momentu odbicia i jej dwukrotny wzrost po odbiciu.

### Rozwiązanie numeryczne

Równania ruchu uzyskane metodą elementów skończonych dla wszystkich modeli obliczeniowych całkowano metodą Newmarka z krokiem czasowym  $\Delta t = \frac{2}{3} 10^{-5} [m/s]$ , odpowiada on czasowi przejścia fali podłużnej o prędkości  $a_1 = 6000 [m/s]$  przez jeden element siatki z rys. 6.2.



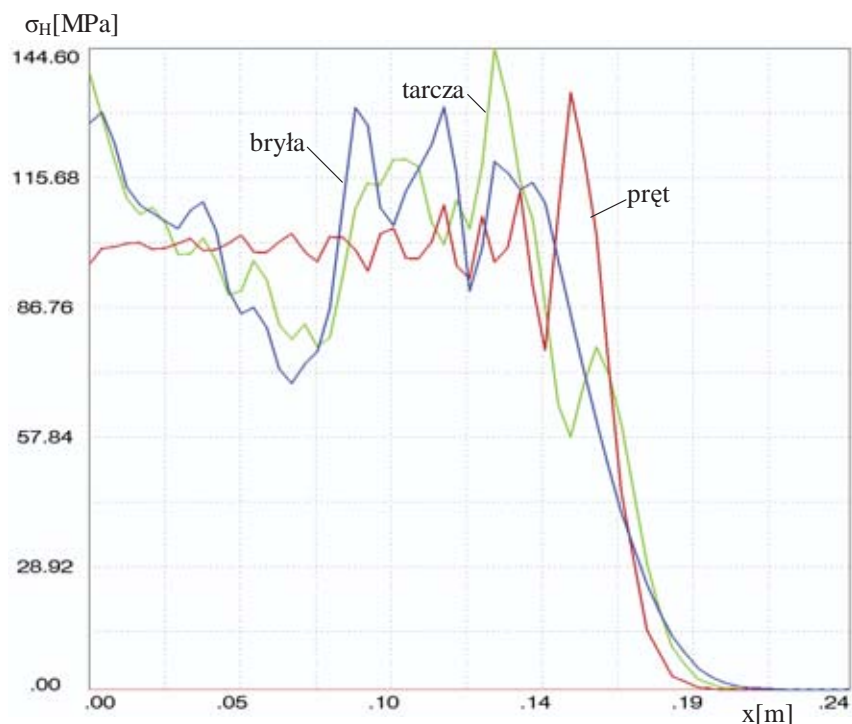
Rys. 6.2. Rozkład naprężenia po czasie  $t=50 \Delta t$ , dla bryły naprężenia przedstawiono w płaszczyźnie środkowej  
 Fig. 6.2. The stress distribution after the time  $t=50 \Delta t$ , for the block the stresses presented in the midplane



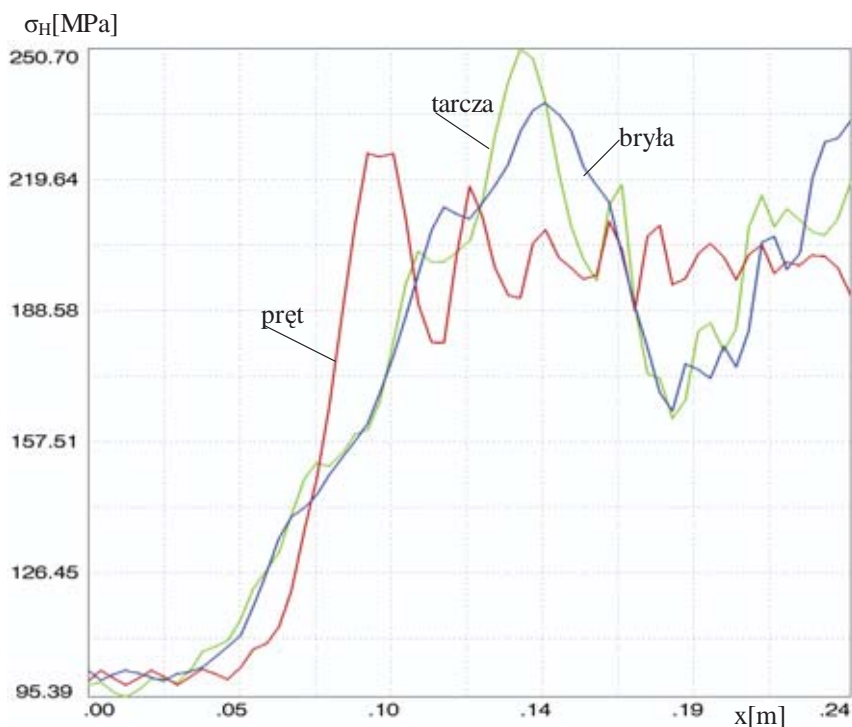
Rys. 6.3. Rozkład naprężenia po czasie  $t=50 \Delta t$  na zewnętrznej powierzchni bryły  
 Fig. 6.3. The stress distribution after the time  $t=50 \Delta t$  on the epidermis of the block

Porównując rozwiązanie dla pręta przedstawione na rys. 6.4 i rys. 6.5 z rozwiązaniem analitycznym (1.5) i (1.6) zauważymy dwukrotny wzrost naprężeń po odbiciu fali od sztywnej przegrody. Istnieje pewne rozmycie frontu fali będące efektem całkowego opisu zagadnienia. Fala w pręcie propaguje się nieco wolniej niż w tarczy lub bryle. Różnica wartości naprężenia dla przypadku pręta, tarczy i bryły wynika z możliwości ruchu poszczególnych punktów ciała w kierunku poprzecznym do osi pręta.





Rys. 6.4. Rozkład naprężenia po czasie  $t=50\Delta t$ , wzdłuż osi symetrii płytki  
 Fig. 6.4. The stress distribution the after the time  $t=50 \Delta t$ , along the axis of plate symmetry

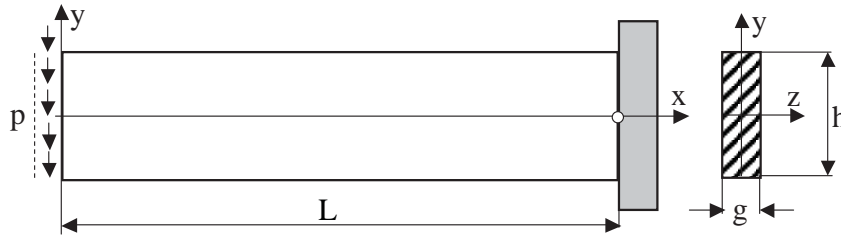


Rys. 6.5 Rozkład naprężenia po czasie  $t=120\Delta t$ , wzdłuż osi symetrii płytki  
 Fig. 6.5. The stress distribution the after the time  $t=120 \Delta t$ , along the axis of plate symmetry

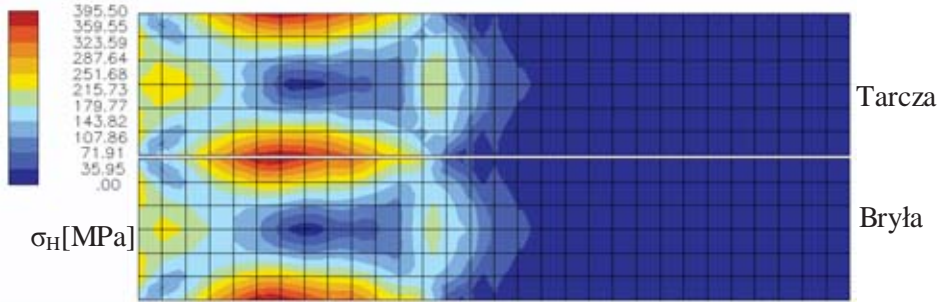
## 6.2. Płytką prostokątna (zginanie)

Rozpatrzmy przypadek gdy płytką prostokątną z rys.6.1 obciążona jest stycznie do powierzchni czołowej (rys. 6.6), przy czym obciążenie zmienia się w czasie identycznie jak poprzednio.

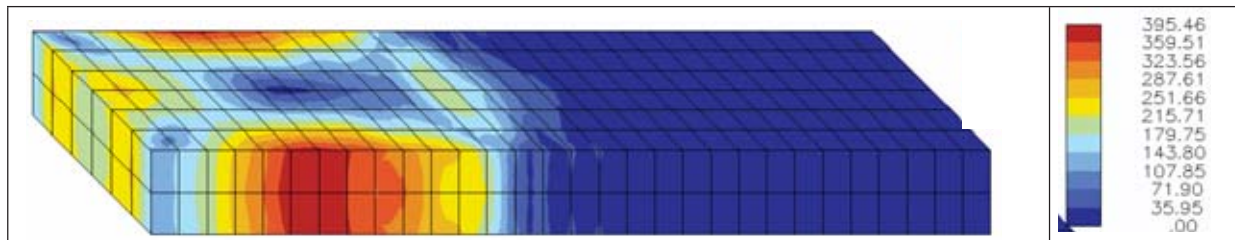




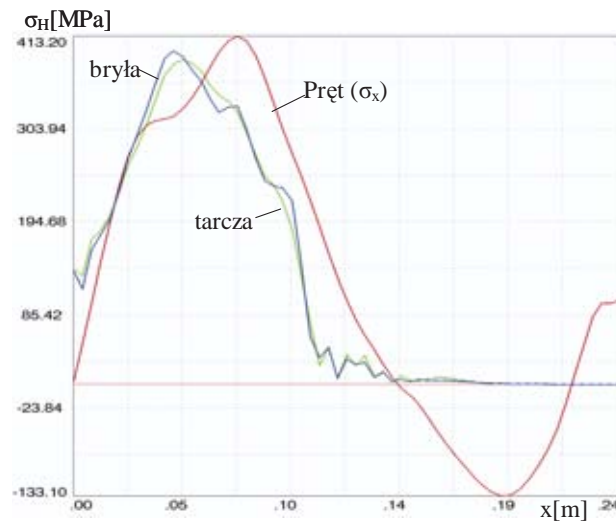
Rys. 6.6. Płytkę o przekroju prostokątnym, ścinaną  
 Fig. 6.6. Plate of the rectangular cross-section, cut off



Rys. 6.7. Rozkład naprężenia po czasie  $t=50 \Delta t$ , dla bryły naprężenia przedstawiono w płaszczyźnie środkowej  
 Fig. 6.7. The stress distribution the after the time  $t=50 \Delta t$ , for the stress block presented in the midplane



Rys. 6.8. Rozkład naprężenia po czasie  $t=50 \Delta t$  na zewnętrznej powierzchni bryły  
 Fig. 6.8. The distribution the stresses after the time  $t=50 \Delta t$  on the epidermis of the block



Rys. 6.9. Rozkład naprężenia po czasie  $t=50 \Delta t$ , wzdłuż krawędzi  $z=0, y=h/2$   
 Fig. 6.9. The stress distribution after the time  $t=50 \Delta t$ , along the edge with  $z=0, y=h/2$

Rozwiązanie dla płytki traktowanej jako tarcza lub bryła jest bardziej zbliżone do siebie niż w przypadku obciążenia normalnego. Rozkład naprężeń po grubości płytki dla modelu bryłowego jest prawie stały (rys.6.8). Jednakże rozwiązanie dla modelu belkowego rys. 6.9 różni się zasadniczo. Zauważamy większą prędkość propagacji fali naprężenia oraz inny jego rozkład wzdłuż osi pręta.

Ponieważ wysokość płytki jest tylko dziesięciokrotnie mniejsza od jej długości to w modelu belkowym oprócz zginania należy uwzględnić ścinanie. Gęstość energii sprężystej przypadająca na jednostkę długości pręta zginanego wyraża się wzorem:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[ \frac{M_g^2}{EI} + \beta \frac{T^2}{GA} \right], \quad (6.6)$$

gdzie  $(EI)$  jest sztywnością pręta na zginanie,  $(GA)$  sztywnością pręta na ścinanie a  $\beta$  współczynnikiem kształtu przekroju  $A$ . Siła tnąca  $T$  i moment gnący  $M_g$  w zależności od przemieszczenia prostopadłego do osi pręta wyraża się formułą:

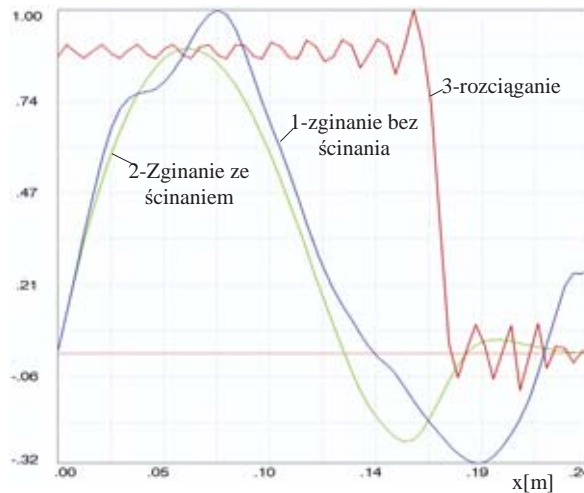
$$M_g(x) = EI \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad T(x) = \frac{dM_g(x)}{dx} = EI \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad (6.7)$$

Moment bezwładności przekroju pręta na zginanie wyrazimy za pomocą promienia bezwładności  $r$  i przekroju  $A$ :

$$I = r^2 A. \quad (6.8)$$

Biorąc pod uwagę, że  $E = 2G(1 + \nu)$  gęstość energii sprężystej wyrazi się następująco:

$$\Phi = \frac{EI}{2} \left[ \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + 2\beta(1 + \nu) r^2 \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 \right]. \quad (6.9)$$



Rys. 6.10. Rozkład naprężenia  $\sigma_x$  po czasie  $t=50\Delta t$ , unormowanego względem wartości maksymalnej, dla rozciągania i zginania

Fig. 6.10. The stress distribution  $\sigma_x$  after the time  $t=50 \Delta t$ , normalized in relation to the maximum value, for extension and bending

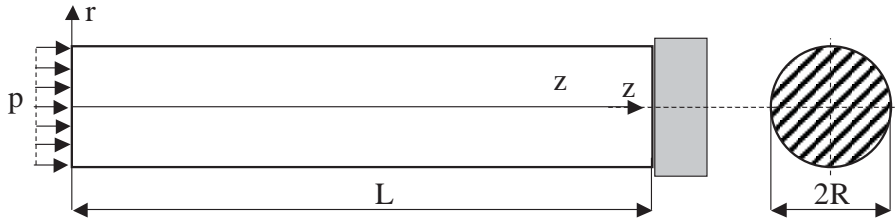
Przyjmując  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  prędkość przemieszczenia pręta i  $\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)$  prędkość obrotu jego przekroju poprzecznego, gęstość energii kinetycznej zapiszemy wzorem:

$$\Theta = \frac{1}{2} \left[ \rho A \dot{y}^2 + \rho I \left( \frac{d\dot{y}}{dx} \right)^2 \right] = \frac{\rho A}{2} \left[ \dot{y}^2 + r^2 \left( \frac{d}{dx} \dot{y} \right)^2 \right]. \quad (6.10)$$

Uwzględniając w modelu numerycznym pręta tylko pierwsze człony wyrażenia na energię sprężystą i energię kinetyczną, to po czasie  $t=50\Delta t$  uzyskamy rozwiązanie określone krzywą 1 na rys.6.10. Jeżeli uwzględnimy obydwie człony to rozwiązanie po tym samym czasie będzie określone krzywą 2 na rys.6.10. Rozwiązanie pręta rozciąganego opisuje krzywa 3. Zmiana kroku czasowego nie zmienia rozwiązania dla pręta. Uzyskaliśmy więc potwierdzenie, że tylko belka typu Timoshenki prawidłowo opisuje propagacje fali sprężystej

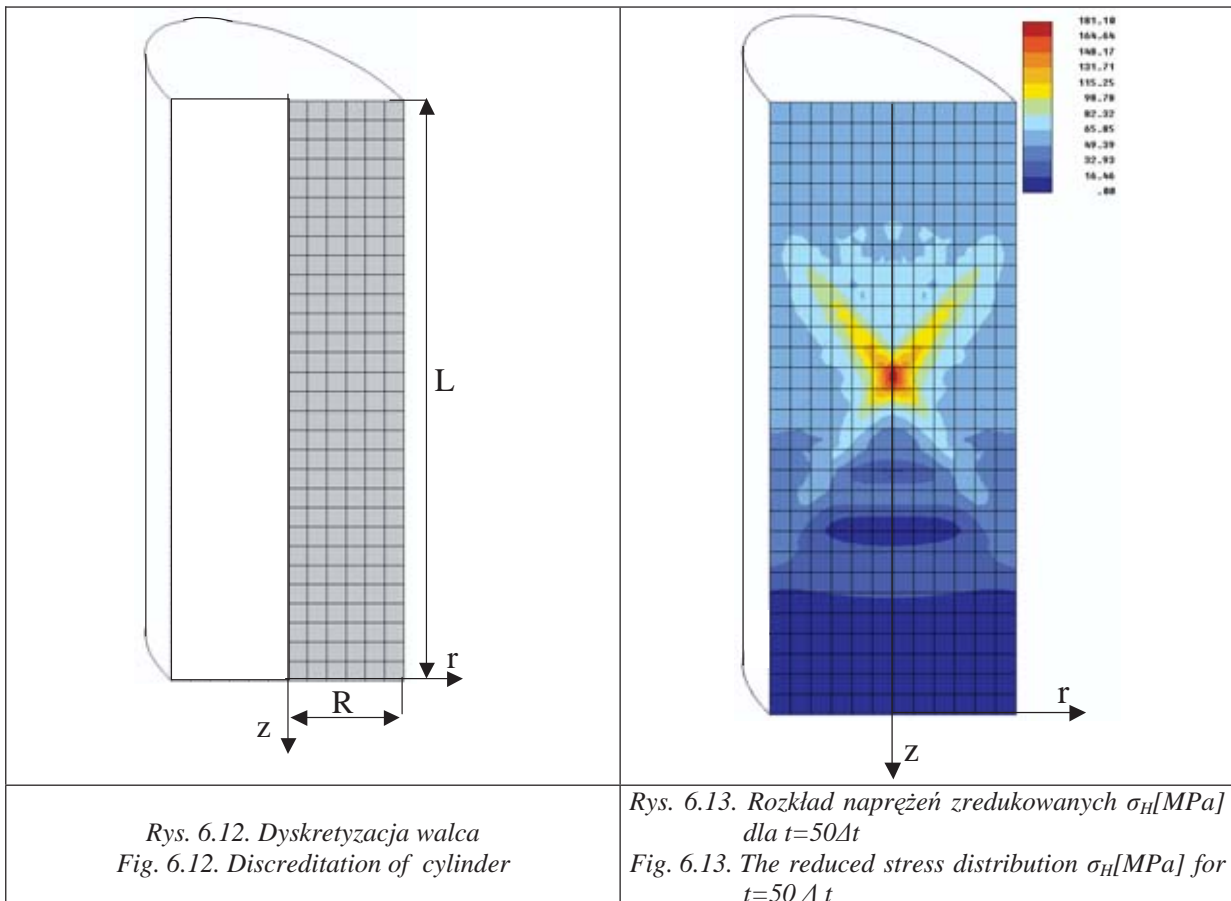
### 6.3. Pręt o przekroju kołowym, traktowany jako walec

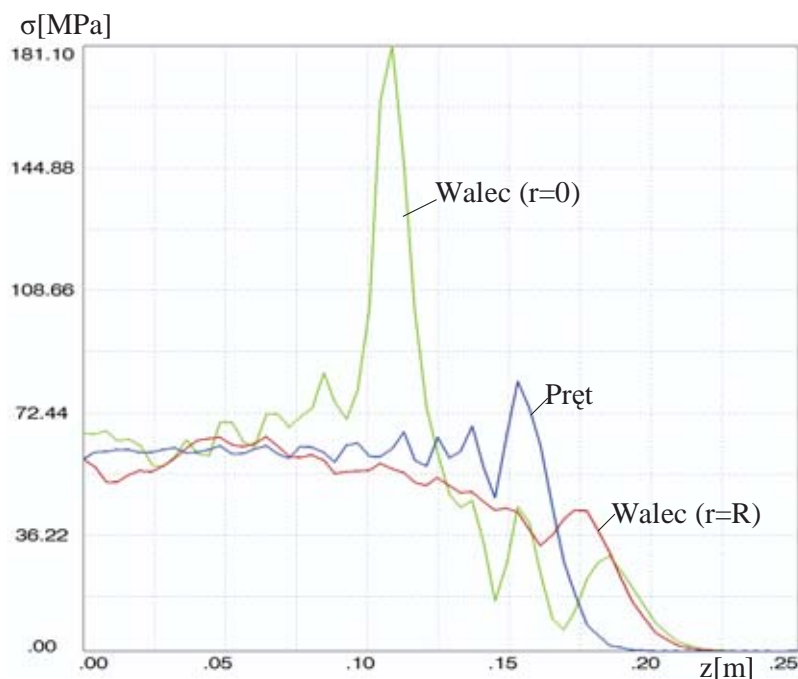
Pręt okrągły rys.6.11 o długości  $L=0.24$ [m] i średnicy  $2R=0.096$ [m] jest wykonany z materiału takiego samego jak płytką z rys.6.1. Pręt sztywno podparty na prawym końcu, obciążony ciśnieniem o wartości  $p=60$ [MPa] równomiernie rozłożonym na jego lewym końcu. Pręt potraktowano jako walec i rozwiązano zagadnienie jako osiowoosymetryczne we współrzędnych walcowych  $(r, z)$  rys.6.12.



Rys. 6.11 Pręt kołowo symetryczny  
Fig. 6.11. Rod circularly symmetrical

W przypadku gdy pręt traktujemy jako bryłę zawsze występuje interferencja fal odbitych od brzegu, która spowodowała maksymalne wyężenie materiału w punkcie znajdującym się na osi walca rys.6.14.. Krok całkowania przyjęto  $\Delta t = \frac{2}{3} 10^{-6}$  [s], stąd po czasie  $t=50\Delta t$  przy prędkości podłużnej  $a_1=6000$ [m/s] front fali powinien się znajdować w odległości  $z=0.20$ [m]. Na rys.6.14 przedstawiono rozkład naprężenia zredukowanego na osi walca ( $r=0$ ) i na jego poboczniczy ( $r=R$ ), oraz rozkład naprężenia uzyskanego z rozwiązania jako zagadnienia prętowego. Porównując głębokość wnikania fali naprężenia widzimy, że w przypadku zagadnienia osiowoosymetrycznego fala propaguje się szybciej niż z prędkością  $a_1$ .





Rys. 6.14. Rozkład naprężeń zredukowanych dla  $t=50\Delta t$   
 Fig. 6.14. The reduced stress distribution for  $t=50\Delta t$

## Literatura

- [1] Demidowicz, B., P., Maron, I., A., *Metody Numeryczne część I i II*. PWN Warszawa 1965.
- [2] Dacko, M., Borkowski, W., Dobrociński, S., , Niezgodą, T. Wieczorek, M., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. ARKADY Warszawa 1994.
- [3] Dobrociński, S., *Stabilność rozwiązań zagadnień odporności udarowej konstrukcji*, Instytut Technologii Eksploatacji, Radom 2000.
- [4] Bogusz, W., Dzygadlo, Z., Kaliski, S., Rogula, D., Rymarz, Cz., Sobczyk, K., Solarz, L., Włodarczyk, E., *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1986.
- [5] Fung, Y. C., *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
- [6] Kleiber, M., *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa 1985.
- [7] Kruszewski, J., Wittbrot, E., *Drgania układów mechanicznych w ujęciu komputerowym*, t.1, WNT, Warszawa 1992.
- [8] Rakowski, C., Kasprzyk, Z., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2005.
- [9] Tichonow, N., Samarski, A. A., *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1963.
- [10] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, Maidenhead, Berkshire 1977.